

目 录

第一章 预备知识	(1)
§ 1.1 集 合	(1)
§ 1.2 群 与 环.....	(2)
§ 1.3 布尔代数.....	(4)
§ 1.4 格	(5)
§ 1.5 极大理想.....	(8)
§ 1.6 布尔代数的同构映射.....	(11)
§ 1.7 拓扑空间与可测空间.....	(14)
§ 1.8 Borel测度	(20)
§ 1.9 L^p 空间	(22)
第二章 Banach 空间	(30)
§ 2.1 Banach 空间	(30)
§ 2.2 Hahn-Banach 定理.....	(32)
§ 2.3 Hahn-Banach 定理的应用—Poisson 积分	(35)
§ 2.4 完备度量空间的两个定理.....	(40)
§ 2.5 Banach-Steinhaus 定理.....	(42)
§ 2.6 开映射定理	(47)
第三章 Banach 代数	(53)
§ 3.1 基本概念.....	(53)
§ 3.2 谱论	(59)
§ 3.3 Banach代数上的理想与同态.....	(66)
§ 3.4 弱拓扑与弱*拓扑.....	(71)

§ 3.5	Gelfand表示理论	(75)
§ 3.6	无单元的Banach代数	(83)
§ 3.7	Banach代数应用举例	(89)
§ 3.8	群代数 $L^1(\mathbf{R})$ 、 $L^1(\mathbf{T})$ 、 $L^1(\mathbf{Z})$ 上的Gelfand 理论	(93)
§ 3.9	向量值积分与解析函数	(106)
§ 3.10	Stone-Weierstrass定理	(123)
第四章	Hilbert空间与B^*-代数	(128)
§ 4.1	Hilbert空间的定义和性质	(128)
§ 4.2	Hilbert空间的直交分解	(132)
§ 4.3	Hilbert空间的同构	(135)
§ 4.4	Hilbert空间的自共轭性	(144)
§ 4.5	Hilbert空间上的线性算子	(148)
§ 4.6	B^* -代数的Gelfand变换	(156)
§ 4.7	对合映射 $x \rightarrow x^*$ 的性质	(159)
§ 4.8	不可交换的Banach代数	(166)
§ 4.9	正泛函	(172)
第五章	正规算子的谱分解	(189)
§ 5.1	单位分解	(189)
§ 5.2	谱定理	(191)
§ 5.3	正规算子的特征值	(205)
§ 5.4	正算子和平方根	(208)
第六章	拓扑群	(212)
§ 6.1	基本概念	(212)
§ 6.2	子群和商群	(218)
§ 6.3	局部紧拓扑群上不变Borel测度的存在性	(224)
§ 6.4	模函数	(237)
§ 6.5	测度代数 $M(G)$	(240)
第七章	交换群上的调和分析初步	(252)

§ 7.1	对偶群.....	(252)
§ 7.2	Bochner定理.....	(261)
§ 7.3	反演公式.....	(271)
§ 7.4	Pontryagin对偶定理.....	(278)
§ 7.5	商群和子群的特征标群.....	(289)
§ 7.6	结构定理.....	(293)
参考书目.....		(302)

第一章 预备知识

§ 1.1 集合

集合是可以互相区别的事物的汇集，也就是具有某种特定属性的事物的全体。构成一个集合的事物称为该集合的元素或元；用大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

x 是集合 A 的元素。我们说“ x 属于 A ”记为 $x \in A$ ； x 不是集合 A 的元素，说“ x 不属于 A ”，记为 $x \notin A$ 。

不含任何元素的集合称为空集，记为 ϕ 。

如果集合 A 中的元素都是集合 B 的元素，则说集合 B 包含集合 A ，记作 $B \supset A$ ；或说 A 含于 B ，记作 $A \subset B$ ；也称 A 为 B 的子集。显然，每个集合均含于它自身之中，即对任何集合 A 都有 $A \subset A$ 。集合 A 的任一异于 A 本身的非空子集合，称为 A 的真子集合。

我们规定空集是任何集合的子集合，即对任何集合 A 有 $\phi \subset A$ 。

如果两个集合 A 、 B 有 $A \subset B$ ，而且 $B \subset A$ ，这时 A 、 B 由相同元素组成，是同一个集合，称 A 等于 B ，记作 $A = B$ 。

一个集合 X 的一切子集合的集合，称为 X 的幂集合，或称为 X 的子集簇，记作 PX 。显然空集 ϕ 及 X 自身必为 PX 的元素，即 $\phi \in PX$ ， $X \in PX$ 。

下面介绍集合的运算。用记号

$$A = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$$

表示集合 A 是具有性质 P 的元素的全体。

集合 $\{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为集合 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ 。

集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为集合 A 与 B 的差，记为 $A \setminus B$ 。当 $B \subset A$

时称差 $A \setminus B$ 为 B 关于 A 的余集,记为 $C_A B$.若在一个固定的集合 A 中讨论子集 B 时,也将 B 关于 A 的余集简称为 B 的余集,记作 B° 或 B' .

集合 $\{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为集合 A 与 B 的交,记为 $A \cap B$.

不难验证集合的并(加)和交(乘)的运算满足以下规律:

$$(1) A \cup B = B \cup A. \quad (\text{交换律})$$

$$(2) A \cap B = B \cap A. \quad (\text{交换律})$$

$$(3) A \cup \phi = A, \quad A \cup A = A.$$

$$(4) A \cap \phi = \phi, \quad A \cap A = A.$$

$$(5) A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C. \quad (\text{结合律})$$

$$(6) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C. \quad (\text{结合律})$$

$$(7) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (\text{分配律})$$

$$(8) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (\text{分配律})$$

$$(9) (A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ. \quad (\text{De Morgan 定律})$$

集合 $\{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B \text{ 或 } x \in B \text{ 但 } x \notin A\}$ 称为集合 A 与 B 的对称差,记作 $A \Delta B$.

由定义知 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$,且 $A \Delta B = B \Delta A$.以上指出对称差也是二集之并,但这两个集 $A \setminus B$ 与 $B \setminus A$ 互相排斥,与任意二集之并是不同的.

若将集合运算的并与交和代数运算的加法与乘法相对比,可以看出它们所遵循的规律有的相同,有的则不同.例如分配律(8)对代数运算是成立的,但(7)则不成立.

§ 1.2 群与环

定义 1 如果在一个非空集合 G 上定义了一个乘法运算,记为 $a \cdot b$ (或定义一个加法运算,记为 $a + b$),满足以下条件:

$$(1) a \in G, b \in G, \text{ 则 } a \cdot b \in G \text{ (或 } a + b \in G);$$

(2) 对于 G 中任意元素 a, b, c 有

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (a + (b + c) = (a + b) + c);$$

(3) 在 G 中有一个元素 e 适合

$$e \cdot a = a \cdot e = a, \quad \forall a \in G$$

(在 G 中有一元素 0 , 适合

$$0 + a = a + 0 = a, \quad \forall a \in G);$$

(4) 对于 G 中的每一个元素 a , 都有一个元素 $a^{-1} \in G$, 使得

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

(对于 G 中的每一个元素 a , 都有一个元素 $-a \in G$, 使得

$$a + (-a) = (-a) + a = 0);$$

则称 G 为一个群。元素 e 称为单位元素, a^{-1} 称为 a 的逆元素 (对于加法运算, 0 也称为零元素, $-a$ 也称为 a 的负元素)。

如果在群 G 中, 对任意 $a, b \in G$ 有 $a \cdot b = b \cdot a$ ($a + b = b + a$), 则称 G 为一交换群。

定义 2 设在非空集合 R 上定义了加法运算和乘法运算, 满足

(1) 关于加法运算形成交换群, 即

$$1) \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad \forall a, b, c \in R;$$

$$2) \quad a + b = b + a, \quad \forall a, b \in R;$$

$$3) \quad \text{在 } R \text{ 中有零元素 } 0, \text{ 使得 } 0 + a = a, \quad \forall a \in R;$$

$$4) \quad \text{对 } R \text{ 中任一元素 } a, \text{ 在 } R \text{ 中有一个元素 } b, \text{ 使得 } a + b = 0;$$

(2) 关于乘法满足结合律

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a, b, c \in R;$$

(3) 关于加法和乘法满足分配律

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \quad \forall a, b, c \in R;$$

则称 R 为一个环。

例 PX 关于代数运算对称差 Δ 及交 \cap 形成一个环。

解 只需用定义来验证。

(1) 首先验证 PX 关于加法——对称差 Δ 形成交换群。

$$1) A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C, \quad \forall A, B, C \in PX;$$

显然，因为等式两边都是由只属于集合 A 、 B 、 C 中某一个集合而不属于其它两个集合中任何一个集合的元素与同属于三个集合的公共元所组成的集合。

$$2) A \Delta B = B \Delta A, \quad \forall A, B \in PX;$$

由对称差的定义，上式显然成立。

$$3) \text{ 空集合 } \phi \text{ 是零元素, } A \Delta \phi = \phi \Delta A = A, \quad \forall A \in PX;$$

$$4) A \text{ 的逆元素即其自身 } A \Delta A = \phi, \quad \forall A \in PX.$$

(2) 结合律和分配律显然成立。

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

以上所给出的环具有以下两个特点：

(1) 存在单位元素 X 。

$$\text{因为 } X \cap A = A \cap X = A, \quad \forall A \subset PX;$$

(2) $A \cap A = A, \quad \forall A \in PX$ ；此时称 PX 为幂等的。

具有单位元素且是幂等的环是我们今后要研究的主要对象。

§ 1.3 布尔代数(Boolean Algebra)

定义 3 设 R 是一个环，若 R 具有关于乘法的单位元 e 且是幂等的，即存在 $e \in R$ ，对任意元素 $x \in R$ 有 $xe = ex = x$ ，而且 $x^2 = x$ ，则称 R 为一个布尔代数。

例 1 X 的子集簇 PX ，以对称差 Δ 为加法。以交 \cap 为乘法；由上一节讨论知构成一个布尔代数，记作 (PX, Δ, \cap) 。

例 2 集合 $A = \{0, 1\}$ ，按以下方法定义加法和乘法

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

则 $\{A, +, \times\}$ 为一个布尔代数.

例 3 已给集合 $X (\neq \phi)$, 研究集合 $\{\phi, X\}$, 以对称差为加法, 以交集为乘法, 则与例 2 完全相同, $\{X, \Delta, \cap\}$ 也是一个布尔代数.

布尔代数 R 具有以下重要性质:

(1) $x+x=0$, 即 $-x=x$; $\forall x \in R$.

(2) $xy=yx$; 即环 R 是可交换的.

证明 任给 $x, y \in R$, 由于 R 是幂等的, 有

$$x+y=(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x+xy+yx+y,$$

所以
$$xy+yx=0. \quad (1)$$

在 (1) 式中取 $y=x$, 得

$$x^2+x^2=x+x=0$$

性质 (1) 得证.

利用性质 (1) 有

$$xy+xy=0, \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式, 利用逆元素的唯一性得

$$xy=yx.$$

性质 (2) 得证.

§ 1.4 格

定义 4 集合 X 中的元素之间的一个关系 $x \prec y$ 称为半序关系, 如果满足

(1) 对于 X 中的每个元素 x 有 $x \prec x$;

(2) $x \prec y, y \prec x$ 蕴涵 $x=y$;

(3) $x \prec y$ 且 $y \prec z$ 蕴涵 $x \prec z$.

此时也称集合 X 被关系 “ \prec ” 半序化. 注意在以上定义中并不要求 X 中的每一对元素 x, y 都有 $x \prec y$ 或 $y \prec x$. 例如集合之间的包含关系是

一个半序关系. 因为 $A \subset A$ 对任何集合 A 总是成立的. $A \subset B$ 及 $B \subset A$ 蕴涵 $A = B$. 若 $A \subset B, B \subset C$ 则 $A \subset C$. 但对于任何两个集合, 并非一定存在包含关系.

以上关系 “ \prec ” 也可读作 “小于等于”, $a \prec b$ 读作 a 小于等于 b (或 a 在 b 之前).

半序集合 X 中的一个子集 $\{a_\alpha\}$, 称为一个链, 如果对于该子集中的任意两个元素 a_α, a_β 都有 $a_\alpha \prec a_\beta$ 或 $a_\beta \prec a_\alpha$.

若 H 是半序集合 X 的一个子集, 如果存在一个元素 $u \in X$, 使得对 H 中的每一个元素 h 有 $h \prec u$, 则称 u 为集合 H 的上界. 自然要求 u 和 H 中的每一个元素是可比较的. 同理, 若存在 $l \in X$, 使得对于 H 中的每个元素 h 有 $l \prec h$, 则称 l 为 h 的下界. 如果上界的集合中有一个最小元素, 则称该元素为 H 的最小上界. 记作 $\text{lub}H$. 同理, 下界集合中的最大元素称为 H 的最大下界. 记作 $\text{glb}H$.

定义 5 如果一个半序集合中的每一对元素 (x, y) 都有一个最小上界和最大下界, 则该半序集合称为一个格.

(x, y) 的最小上界记作 $x \vee y$, (x, y) 的最大下界记作 $x \wedge y$.

由以上定义知, 所谓 $z = x \vee y$ ($z = x \wedge y$) 是指 z 满足

(1) $x \prec z, y \prec z$ ($z \prec x, z \prec y$);

(2) 若 $x \prec u, y \prec u$ 则 $z \prec u$ (若 $u \prec x, u \prec y$, 则 $u \prec z$).

若在布尔代数 R 上, 将 “ $x \prec y$ ” 定义为 $xy = x$, 则 R 是半序的. 因为容易验证 “ \prec ” 是一个半序关系.

(1°) $x \cdot x = x^2 = x$, 所以 $x \prec x$.

(2°) $x \prec y \Rightarrow x \cdot y = x$,

$y \prec x \Rightarrow x \cdot y = y$,

所以 $x = y$.

(3°) $x \prec y \Rightarrow xy = x$,

$y \prec z \Rightarrow yz = y$,

又 $xz = xyz = xy = x$, 故 $x \prec z$.

命题 关于 “ \prec ” 布尔代数 R 是一个格.

证 只需证对任意二元素 $x, y \in R$, 都存在 $x \vee y, x \wedge y$.

首先证明 $x \wedge y = xy$. 只需用最大下界的定义来验证.

$$(1') \quad xy \cdot x = x \cdot xy = x^2y = xy, \quad \text{所以 } xy \prec x.$$

$$xy \cdot y = xy^2 = xy, \quad \text{所以 } xy \prec y.$$

(2') 若 $u \prec x, u \prec y$. 则

$$uxy = ux \cdot y = uy = u, \quad \text{故 } u \prec xy.$$

即 xy 为最大下界, $x \wedge y = xy$.

再证明 $x \vee y = x + y + xy$.

$$(1') \quad (x + y + xy)x = x^2 + xy + xy = x,$$

所以 $x \prec x + y + xy$;

$$\text{同理, } (x + y + xy)y = xy + y^2 + xy = y,$$

所以 $y \prec x + y + xy$.

(2') 若 $x \prec u, y \prec u$ 则

$$u(x + y + xy) = ux + uy + uxy = x + y + xy,$$

所以 $x + y + xy \prec u$,

即 $x + y + xy$ 为最小上界, $x \vee y = x + y + xy$.

又由 $x \in R, y \in R$ 知 $x + y \in R, xy \in R$, 故 $x + y + xy \in R$,

即 $x \wedge y \in R, x \vee y \in R$. 所以 R 是一个格.

例如, § 1.3中例 1 指出 (PX, Δ, \cap) 为一个布尔代数. 又集合间的包含关系为一个半序关系, 显然 $A \subset B$, 当且仅当 $A \cap B = A$.

显然 A, B 的最小上界为 $A \cup B$. 用 Δ 及 \cap 表示有

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

又 A, B 的最大下界为 $A \cap B$. 故 (PX, Δ, \cap) 为一个格.

在格 R 中再定义如下的运算: 对于 $x \in R$ 定义

$$x' = x + e,$$

其中 e 为 R 的单位元素.

由定义有

$$x + x' = x + x + e = e.$$

$$x \cdot x' = x(x + e) = x + x = 0.$$

容易看出这种运算相当于 PX 中的余集运算. 若 $A \in PX$, 显然
 $A \Delta A' = X, A \cap A' = \phi$.

可以证明:

$$(x \wedge y)' = x' \vee y';$$

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'.$$

也称为De Morgan定律.

§ 1.5 极大理想

以下用 R 表示一个布尔代数, 且在其上半序关系“ $x \prec y$ ”定义为 $xy = x$, 定义运算 $x' = x + e$. 由以上讨论知 R 为一个格且

$$x \wedge y = xy, \quad x \vee y = x + y + xy.$$

定义 6 设 $I \subset R$ 满足

(1°) 若 $x, y \in I$, 则 $x + y \in I$, 即 I 对加法是封闭的;

(2°) 若 $x \in I, z \in R$, 则 $xz \in I$;

那末 I 就叫做一个理想.

注意, 理想比子环要求要强, 对于子环只要求当 $x, z \in I$ 时,
 $xz \in I$, 故理想必为子环.

定理 1 I 是一个理想的充要条件为

(1) $x, y \in I$ 则 $x \vee y \in I$;

(2) $x \in I, z \prec x$, 则 $z \in I$.

证 必要性. 即由定义 6 的(1°), (2°)成立, 证明定理中的
 (1), (2)也成立.

设 $x, y \in I$, 由(1°)有 $x + y \in I$, 由(2°)有 $xy \in I$, 又 $x \vee y = x + y + xy$, 再利用(1°)得 $x \vee y \in I$, 即定理中(1)成立.

设 $z \prec x$, 故 $zx = z$. 又 $x \in I, z \in R$, 由(2)知 $xz \in I$ 即 $z \in I$,
 故定理中(2)成立.

充分性. 由定理中(1), (2)证定义 6 中(1°), (2°).

设 $x, y \in I$, 由(1)知 $x \vee y \in I$, 又

$$\begin{aligned}(x+y)(x \vee y) &= (x+y)(x+y+xy) = (x+y)^2 + (x+y)xy \\ &= x+y+xy+xy = x+y;\end{aligned}$$

即 $x+y \prec x \vee y$, 由(2)知 $x+y \in I$. 即定义6中(1°)得证.

若 $x \in I$, $z \in R$, $xz \cdot x = x^2 z = xz$, 故 $xz \prec x$. 由(2)知 $xz \in I$. 即定义6中(2°)得证.

定义7 设 M 是一个理想, 如果 $M \neq R$ 且若 N 是一个理想而且 $N \supset M$, 必有 $N = R$ 或 $N = M$; 则称 M 为一个极大理想.

由定义可以看出不可能有一个极大理想包含单元 e . 因为若 I 为一个极大理想且 $e \in I$, 则由理想定义知, 任取 $x \in R$ 则 $xe = x \in I$, 于是 $I = R$; 与极大理想定义不符.

我们用 \mathcal{M} 表示 R 的所有极大理想的集合, 自然需要证明 \mathcal{M} 是非空的. 这可由以下定理得出.

定理2 对于任意的 $x \in R$, 若 $x \neq 0$ 则存在一个包含 x 的极大理想 M ; 即存在 $M \in \mathcal{M}$ 且 $x \in M$.

证 分两步证之.

首先考虑所有包含 x 而不包含 e 的理想所构成的集合 \mathcal{A} . \mathcal{A} 是非空的. 事实上, 令

$$I_x = \{yx \mid y \in R\}$$

则 $I_x \in \mathcal{A}$. 因为当取 $y = e$ 时 $yx = ex = x \in I_x$, 即 $x \in I_x$. 又若 $yx \in I_x$, $zx \in I_x$, 则 $yx + zx = (y+z)x \in I_x$. 若 $yx \in I_x$, $z \in R$, 则 $z(yx) = (zy)x \in I_x$. 故 I_x 是包含 x 的理想. 通常称 I_x 为包含 x 的主理想.

再证明 \mathcal{A} 有极大元素, 即 M 存在. 这里要用到 Zorn 引理.

Zorn 引理 设 \mathcal{A} 是半序集合, \mathcal{A} 非空. 若在 \mathcal{A} 中任取一个链必具有上确界, 则 \mathcal{A} 有极大元素.

\mathcal{A} 按集合包含关系是半序的, 在 \mathcal{A} 中任取一个链 $\{I_\alpha\}$. 现证 $\{I_\alpha\}$ 有上界. 作

$$I = \bigcup_{\alpha} I_\alpha.$$

显然, 对一切 α 有 $I \supset I_\alpha$. 今证 I 也是理想. 事实上, 若 $x \in I, y \in I$,

则必存在某个 α 和 β 使得 $x \in I_\alpha$, $y \in I_\beta$. 由于 $\{I_\alpha\}$ 是一个链, I_α , I_β 必有包含关系, 不妨设 $I_\alpha \subset I_\beta$, 则 $x \in I_\beta$, $y \in I_\beta$, 又 I_β 是理想, 所以 $x+y \in I_\beta$. 由此知 $x+y \in I$.

又若 $x \in I$, $z \in R$, 则必存在某个 γ 使 $x \in I_\gamma$. 所以 $zx \in I_\gamma$, 即 $zx \in I$.

由以上讨论知 I 为理想, 又 $x \in I_\alpha$ 故 $x \in I$. 且 $e \notin I_\alpha$, $\forall \alpha$, 故 $e \notin I$. 所以 $I \in \mathcal{I}$, 即链 $\{I_\alpha\}$ 有上界 I .

由Zorn引理知 \mathcal{I} 必有极大元素 M .

又若 N 为包含 x 的理想, $N \supset M$ 且 $N \neq R$, 则 $N \in \mathcal{I}$, 但 M 是极大元素, 故 $N=M$. 所以 M 是一个极大理想. 即 $M \in \mathcal{M}$ 且 $x \in M$. 定理得证.

定理 3 若 $x, y \in R$, $x \neq y$, 则必有极大理想 M , 使得 $x \in M$ 而 $y \notin M$; 或者 $x \notin M$ 而 $y \in M$.

证 首先指出 $x \vee y'$ 和 $x' \vee y$ 中至少有一个不是 e . 因为若 $x \vee y' = e$ 且 $x' \vee y = e$, 则

$$y = ye = y(x \vee y') = y(x + y' + xy') = yx + yy' + yxy' = yx,$$

$$\text{且 } x = xe = x(x' \vee y) = x(x' + y + x'y) = xy = yx,$$

所以 $x=y$, 此与题设 $x \neq y$ 矛盾.

故不妨设 $x \vee y' \neq e$, 由定理 2 知, 必存在极大理想 M , 使 $x \vee y' \in M$, 但 $x \prec x \vee y'$, 所以 $x \in M$. 同理有 $y' \in M$.

但是若 $y' \in M$ 则 $y \notin M$, 否则有 $e = y \vee y' \in M$, 于是 $M=R$ 与 M 是极大理想矛盾. 定理得证.

定理 4 若 M 是极大理想, 则对于一切 $x \in R$, 或者 $x \in M$ 或者 $x' \in M$.

证 任取 $x \in R$, 有四种可能情形: (1) $x \in M$, $x' \in M$; (2) $x \in M$, $x' \notin M$; (3) $x \notin M$, $x' \in M$; (4) $x \notin M$, $x' \notin M$.

显然情形(1)不能成立, 因为若 $x \in M$, $x' \in M$, 则 $e = x \vee x' \in M$. 与 M 是极大理想矛盾.

再证明情形(4)亦不能成立, 若 $x \notin M$, 作集合

$$N = \{zx + m \mid z \in R, m \in M\},$$

则 N 是一个理想. 因为若 $z_1x + m_1 \in N$, $z_2x + m_2 \in N$;

则 $(z_1x + m_1) + (z_2x + m_2) = (z_1 + z_2)x + (m_1 + m_2) \in N$.

又任取 $zx + m \in N$ 及 $y \in R$, 则 $yz \in R$, $ym \in M$, 故
 $y(zx + m) = (yz)x + ym \in N$,

故 N 为理想.

又 $x \in N$. 因为取 $z = e$, 则 $ex + 0 = x \in N$. 而 $x \notin M$ 所以 $N \neq M$.
 因为 $m \in M$ 且 $m = 0 \cdot x + m \in N$, 所以 $M \subset N$. M 是极大理想, 故 $N = R$. 即 e 可以写成

$$e = z_0x + m_0,$$

其中 $z_0 \in R$, $m_0 \in M$. 由此得出

$$x' = x'e = x'(z_0x + m_0) = x'm_0 \in M.$$

即由 $x \notin M$ 推出 $x' \in M$. 可见 (4) 是不能成立的. 故只有情形 (2) 或者情形 (3) 成立. 定理得证.

§ 1.6 布尔代数的同构映射

定义 8 设 S 和 \tilde{S} 是具有两个代数运算 (加法和乘法) 的系统, 若有一个映射使 S 中每个元素 a , 都存在 \tilde{S} 中的元素 \tilde{a} 与之对应, 且保持代数运算. 即满足:

$$a \rightarrow \tilde{a}, b \rightarrow \tilde{b} \implies a + b \rightarrow \tilde{a} + \tilde{b}, a \cdot b \rightarrow \tilde{a} \cdot \tilde{b}.$$

则称此映射为同态映射. \tilde{S} 称为 S 的一个同态像. 如果这个映射又是 1-1 的, 则称此映射为同构映射.

本节将研究布尔代数 R 的表示法, 给出 R 与其极大理想集合 \mathcal{M} 之间的关系. 对于 R 中的每一个 x , 作 \mathcal{M} 的子集合

$$\mathcal{M}_x = \{M \in \mathcal{M} \mid x \notin M\}.$$

由定理 2、3、4 知, 当 $x \neq y$ 则 $\mathcal{M}_x \neq \mathcal{M}_y$, 且 \mathcal{M}_x 也可定义为

$$\mathcal{M}_x = \{M \in \mathcal{M} \mid x' \in M\}.$$

\mathcal{M}_x 具有以下性质:

$$(1) \quad \mathcal{M}_{x \wedge y} = \mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y.$$

证 $M \in \mathcal{M}_{x \wedge y} \Rightarrow x \wedge y \notin M \Rightarrow x \notin M$ 且 $y \notin M$ (因为 $x \wedge y \prec x, x \wedge y \prec y$) $\Rightarrow M \in \mathcal{M}_x$ 且 $M \in \mathcal{M}_y \Rightarrow M \in \mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y$.

所以 $\mathcal{M}_{x \wedge y} \subset \mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y$.

反之. $M \in \mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y \Rightarrow x \notin M$ 且 $y \notin M \Rightarrow x' \in M$ 且 $y' \in M \Rightarrow x' \vee y' \in M \Rightarrow (x \wedge y)' \in M \Rightarrow x \wedge y \notin M \Rightarrow M \in \mathcal{M}_{x \wedge y}$.

即 $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y \subset \mathcal{M}_{x \wedge y}$. 证毕.

$$(2) \quad \mathcal{M}_{x \vee y} = \mathcal{M}_x \cup \mathcal{M}_y.$$

证 $M \in \mathcal{M}_{x \vee y} \Leftrightarrow x \vee y \notin M \Leftrightarrow x \notin M$ 或 $y \notin M \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_x$ 或 $M \in \mathcal{M}_y \Leftrightarrow M \in \mathcal{M}_x \cup \mathcal{M}_y$. 证毕.

$$(3) \quad (\mathcal{M}_x)' = \mathcal{M}_{x'}.$$

证 $M \in \mathcal{M}_{x'} \Leftrightarrow x' \notin M \Leftrightarrow x \in M \Leftrightarrow M \notin \mathcal{M}_x \Leftrightarrow M \in (\mathcal{M}_x)'$.

$$(4) \quad \mathcal{M}_{x+y} = \mathcal{M}_x \Delta \mathcal{M}_y.$$

证 由 x' 的定义知

$$xy' \vee x'y = xy' + x'y + xy' \cdot x'y = xy' + x'y = x(y + e) + (x + e)y = xy + x + xy + y = x + y.$$

所以 $\mathcal{M}_{x+y} = \mathcal{M}_{xy' \vee x'y} = \mathcal{M}_{xy'} \cup \mathcal{M}_{x'y} = \mathcal{M}_{x \wedge y'} \cup \mathcal{M}_{x' \wedge y}$
 $= (\mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_{y'}) \cup (\mathcal{M}_{x'} \cap \mathcal{M}_y) = (\mathcal{M}_x \cap (\mathcal{M}_y)') \cup ((\mathcal{M}_x)' \cap \mathcal{M}_y)$
 $= \mathcal{M}_x \Delta \mathcal{M}_y$. 证毕.

现在考虑布尔代数 R 及 \mathcal{M} 的子集簇 $P\mathcal{M}$ 之间的映射:

$$x \longleftrightarrow \mathcal{M}_x$$

则由定理 3、4 知, 若 $x \neq y$, 则 $\mathcal{M}_x \neq \mathcal{M}_y$, 即映射是一一对应的.

又由 § 1.3 例 1 知 $(P\mathcal{M}, \Delta, \cap)$ 是一个布尔代数. 故由以上性质 (1)、(4) 即

$$\mathcal{M}_{xy} = \mathcal{M}_{x \wedge y} = \mathcal{M}_x \cap \mathcal{M}_y$$

$$\mathcal{M}_{x+y} = \mathcal{M}_x \Delta \mathcal{M}_y$$

知映射保持乘法与加法运算. 所以 $x \longleftrightarrow \mathcal{M}_x$ 为 R 和 $P\mathcal{M}$ 之间的同构

映射。得以下定理。

定理 5 映射 $x \longleftrightarrow \mathcal{M}_x$ 是将 R 映射为 $P\mathcal{M}$ 的同构映射。

这个定理指出如何将布尔代数 R 嵌入极大理想集合 $P\mathcal{M}$ ，使抽象的系统 R 得到具体的表示。

对于每一个 $x \in R$ ，还可以考虑将极大理想集合 \mathcal{M} 映到 § 1.3 例 2 所给的最小的布尔代数 $\{0, 1\}$ 的映射 \hat{x} ：

$$\hat{x}(M) = \begin{cases} 0, & x \in M; \\ 1, & x \notin M. \end{cases}$$

则 \hat{x} 具有以下性质：

(1) $x \neq y$ 则 $\hat{x} \neq \hat{y}$ 。显然。

(2) $(x + y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y}$ 。

$$\text{证} \quad (x + y)^{\wedge}(M) = \begin{cases} 0, & x + y \in M; \\ 1, & x + y \notin M. \end{cases}$$

若 $x + y \in M$ ，则 $M \in \mathcal{M}_{x+y} = \mathcal{M}_x \Delta \mathcal{M}_y$ 。故或者 $M \notin \mathcal{M}_x$ 同时 $M \notin \mathcal{M}_y$ ；或者 $M \in \mathcal{M}_x$ 同时 $M \in \mathcal{M}_y$ 。由此知

$x + y \in M \implies x \in M$ 同时 $y \in M$ ，或者 $x \notin M$ 同时 $y \notin M$ 。

当 $x \in M$ 则 $\hat{x}(M) = 0$ ， $y \in M$ 则 $\hat{y}(M) = 0$ ，

所以 $(x + y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y} = 0$ 。

当 $x \notin M$ 则 $\hat{x}(M) = 1$ ， $y \notin M$ 则 $\hat{y}(M) = 1$ ，

所以 $(x + y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y} = 0$ 。

若 $x + y \notin M \implies x \in M, y \notin M$ ；或 $x \notin M, y \in M$ 。

$x \in M, \hat{x}(M) = 0, y \notin M, \hat{y}(M) = 1$ 。所以

$$(x + y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y} = 1.$$

$x \notin M, \hat{x}(M) = 1, y \in M, \hat{y}(M) = 0$ 。所以

$$(x + y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y} = 1.$$

(3) $(xy)^{\wedge} = \hat{x} \hat{y}$ 。证明与(2)同。

以上性质说明映射 $\{\hat{x}(M)\}$ 所构成的集合保持加法与乘法运算。

(4) 映射 $\hat{x}(M)$ 的核记作 $K_{\hat{x}} = \{M \mid \hat{x}(M) = 0\}$, 则由 \mathcal{M}_x 的定义知

$$K_{\hat{x}} = (\mathcal{M}_x)' = \mathcal{M}_x'.$$

同理映射 $\hat{x}'(M)$ 的核为 $K_{\hat{x}'} = (\mathcal{M}_{x'})' = \mathcal{M}_{x''}$.

§ 1.7 拓扑空间与可测空间

定义 9 集合 X 的子集簇 $\tau \subset PX$ 称为 X 上的一个拓扑, 若 τ 具有如下三个性质:

(1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$;

(2) $U, V \in \tau$ 则 $U \cap V \in \tau$;

(3) 若 $\{V_\alpha\} (\alpha \in A)$ 是 τ 的元素的任何集簇, 则 $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \tau$.

若 τ 是 X 上的拓扑, 则 X 称为拓扑空间, 且 τ 的元素称为 X 的开集.

若 X 和 Y 为拓扑空间, f 是 X 到 Y 内的映射, 若对 Y 的每一个开集 V , $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 则称 f 为连续的.

定义 10. 设 X 是拓扑空间, 集 $K \subset X$, 如果 K 的每个开覆盖包含有限子覆盖, 即若存在开集簇 $\{U_\alpha\}, \alpha \in A$, 使得 $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset K$, 必存在 A 的有限子集 F , 使 $\bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha \supset K$, 则称 K 为紧集合.

如果 X 本身是紧的, 则称 X 为紧空间. 如果 X 的每一点有一个邻域, 且该邻域的闭包是紧的, 则称 X 为局部紧空间.

定义 11 若 X 是一个拓扑空间, 如果对于任意 $p \in X, q \in X, p \neq q$, 可以找到开集 $U_p \in X, U_q \in X$, 使得 $p \in U_p, q \in U_q$ 且 $U_p \cap U_q = \emptyset$, 则称 X 为 Hausdorff 空间.

欧氏空间 R^n 的紧子集就是有界闭集, R^n 是局部紧的 Hausdorff 空间, 而且每个度量空间也是 Hausdorff 空间.

定义 12 集合 X 的子集簇 $\mathcal{P} \subset PX$ 称为 X 的一个 σ -代数, 若 \mathcal{P}

具有如下性质:

(1) $X \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$, 其中 $A^c = X \setminus A$;

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1, 2, \dots$ 则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

若 \mathcal{F} 是 X 的 σ -代数, 则称 X 为可测空间, \mathcal{F} 的元素称为 X 的可测集. 为更明确起见, 通常用 (X, \mathcal{F}) 记可测空间.

若 X 是可测空间, Y 是拓扑空间, f 是 X 到 Y 的映射, 若对每一个开集 $V \in Y$, $f^{-1}(V)$ 是 X 的可测集, 则称 f 为可测的.

定理 6. 若 \mathcal{A} 是 X 的任意子集族, 则在 X 内存在一个最小的 σ -代数 \mathcal{F}^* , 使得 $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}^*$.

证: 令 \mathcal{M} 是 X 内所有包含 \mathcal{A} 的 σ -代数 \mathcal{F} 的集合.

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ 是 } X \text{ 的 } \sigma\text{-代数, 且 } \mathcal{F} \supset \mathcal{A} \}.$$

因为 PX 是 X 的一个 σ -代数且 $\mathcal{A} \subset PX$, 所以 \mathcal{M} 是非空的, 设 \mathcal{F}^* 为所有 $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ 的交:

$$\mathcal{F}^* = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{M}} \mathcal{F}.$$

则 \mathcal{F}^* 含于每一个包含 \mathcal{A} 的 σ -代数中. 下面证明 \mathcal{F}^* 是 σ -代数.

(1) $X \in \mathcal{F}^*$. 显然, 因为 $X \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$.

(2) 若 $A \in \mathcal{F}^*$, 则 $A \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$. 由于 \mathcal{F} 是 σ -代数, 故 $A^c \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$. 所以 $A^c \in \mathcal{F}^*$.

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}^*$, $n=1, 2, \dots$, 则 $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$, $n=1, 2, \dots$, 故 $\bigcup A_n \in \mathcal{F}$, $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{M}$, 所以 $\bigcup A_n \in \mathcal{F}^*$.

这就证明了 \mathcal{F}^* 是包含 \mathcal{A} 的最小的 σ -代数, 也称 \mathcal{F}^* 为由 \mathcal{A} 生成的 σ -代数.

定义 13. 设 X 是拓扑空间, 在 X 内存在一个最小的 σ -代数 \mathcal{B} , 使得 X 内的每一个开集都属于 \mathcal{B} (定理 6). 称 \mathcal{B} 内的元素为 X 的 Borel 集.

由以上定义知, X 中的闭集是 Borel 集, 因为闭集是开集的余集; 且闭集的一切可数并及开集的一切可数交都是 Borel 集, 闭集的可数并称为 F_σ 集, 开集的可数交称为 G_δ 集.

因为 \mathscr{B} 是 σ -代数, 可以将 X 看成一个可测空间, 即 (X, \mathscr{B}) ; 此时 \mathscr{B} 集起着可测集的作用. 若 Y 是任意拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是 X 的连续映射, 由定义, 对 Y 的每一个开集 V , $f^{-1}(V) \in \mathscr{B}$, 即 X 的每个连续映射是 Borel 可测的.

定义 14. 设 \mathscr{F} 是 X 上的一个 σ -代数, 若对于每一个 $A \in \mathscr{F}$, 有一个实数 $\mu(A)$ 与之对应, $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$, 且满足以下条件:

$$(1) \mu(\phi) = 0,$$

(2) 对于任何 $\{A_n\} \in \mathscr{F}$, 当 $m \neq n$, $A_m \cap A_n = \phi$, 有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\text{可数可加性}),$$

则称 μ 为 \mathscr{F} 上的一个正测度, 简称测度.

一个可测空间 (X, \mathscr{F}) 具有定义在 \mathscr{F} 上的正测度 μ . 记作 (X, \mathscr{F}, μ) , 称为一个测度空间.

定理 7. 设 μ 为 σ -代数 \mathscr{F} 上的正测度, 则

(1) 若 A_1, \dots, A_n 均为 \mathscr{F} 的两两不相交的元素,

则 $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$

(2) 如果 $A \in \mathscr{F}$, $B \in \mathscr{F}$, 且 $A \subset B$, 则 $\mu(A) \leq \mu(B).$

(3) 若 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{F}$ 且

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A).$

(4) 若 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathscr{F}$, 且

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

$\mu(A_1)$ 为有限数, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A).$

证 (1) 在定义14的条件(2)中, 取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \phi$ 即得之。

(2) $B = A \cup (B \setminus A)$. 且 $A \cap (B \setminus A) = \phi$, 则由(1)得 $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

(3) 令 $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n = 2, 3, \dots$, 则 $B_n \in \mathcal{F}$, 且当 $i \neq j$ 时 $B_i \cap B_j = \phi$. $A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

由(1)知, $\mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i)$, 又由测度定义知 $\mu(A) =$

$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$, 由无穷级数和的定义得(3).

(4) 令 $C_n = A_1 \setminus A_n$. 则 $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \cdots$,

$$\mu(C_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n).$$

又 $A_1 \setminus A = \bigcup C_n$, 于是由(3)得

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

即得(4).

定义15. 设 $f(x)$ 是定义在可测空间 X 上的实函数, 若对于任何有限实数 a , 集合 $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ 是可测集, 则称 $f(x)$ 为可测函数. 在可测空间 X 上, 值域仅由 $(0, \infty)$ 内有限个点组成的函数 s , 称为简单函数.

若简单函数 s 的值是 a_1, a_2, \dots, a_n , 且令 $A_i = \{x \mid s(x) = a_i\}$, 则显然

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

其中 χ_{A_i} 是 A_i 的特征函数. 即

$$\chi_{A_i} = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A_i, \\ 0, & \text{当 } x \notin A_i. \end{cases}$$

定义16. 若 \mathcal{F} 是集 X 上的 σ -代数, μ 为 \mathcal{F} 上的正测度, s 是 X

上的可测简单函数

$$s = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}.$$

如果 $E \in \mathcal{F}$, 定义积分

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap E).$$

若 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 为可测函数, $E \in \mathcal{F}$, 则 f 在 E 上关于测度 μ 的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s d\mu.$$

其中上确界取遍所有使得 $0 \leq s \leq f$ 的简单可测函数 s .

由以上定义显然有以下命题, 其中出现的函数和集都假定是可测的.

(1) 若 $0 \leq f \leq g$, 则 $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$,

(2) 如果 $A \subset B$, $f \geq 0$, 则 $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$,

(3) 若 $f \geq 0$, c 为常数, $0 \leq c \leq \infty$, 则

$$\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(4) 若 $f \geq 0$, 则 $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$.

另外, 若 $f(x) = 0, \forall x \in E$, 即使 $\mu(E) = \infty$, 我们约定 $\int_E f d\mu =$

0; 同样, 若 $\mu(E) = 0$, 且 $f(x) = \infty, \forall x \in E$ 也有 $\int_E f d\mu = 0$.

下面给出几个重要的定理.

定理 8 (Lebesgue 单调收敛定理). 设 $\{f_n\}: X \rightarrow [0, \infty]$ 是一个 X 上的可测函数序列, 且满足

(1) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty, \forall x \in X$,

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x) \rightarrow f(x), \forall x \in X$;

则 f 是可测的, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

定理 9 (Fatou引理). 如果 $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ 是可测的, $n = 1, 2, \dots$; 则

$$\int_X (\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

定理 10. 若 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 是可测的, 且

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{F})$$

则 φ 是 \mathcal{F} 上的一个测度, 且

$$\int_X g d\varphi = \int_X g f d\mu.$$

对值域在 $[0, \infty]$ 内 X 上的任一可测函数 g 成立.

还可以在测度空间 (X, \mathcal{F}, μ) 上考虑复函数的积分. 若 $f(x) = u(x) + iv(x)$, 其中 u 和 v 是 X 上的可测函数, 也就是 $f(x): X \rightarrow \mathbf{C}$ (复数域) 是 X 上的复可测函数, 定义 $L^1(X, \mu)$:

$$L^1(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbf{C} \text{ 可测} \mid \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

$L^1(X, \mu)$ 中的元素称为 Lebesgue 可积函数.

若 $f \in L^1(X, \mu)$, $f = u + iv$, 对每一个可测集 E 定义

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu.$$

其中 $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \max(-u, 0)$ 即 u 的正部和负部, v^+ , v^- 分别为 v 的正部和负部.

定理 11. 若 $f \in L^1(X, \mu)$, 则

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

定理12 (Lebesgue控制收敛定理). 若 $\{f_n\}$ 是 X 上的复可测函数序列, 满足

$$(1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in X;$$

(2) 存在一个函数 $g \in L^1(X, \mu)$, 使得

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall x \in X, \quad n = 1, 2, \dots;$$

则 $f \in L^1(X, \mu)$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

$$\text{于是有} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

§ 1.8 Borel测度

定义17. 集合 X 叫作数域 K 上的一个线性空间, 如果下列条件成立:

(1) X 是一个可交换的加法群;

(2) 对于每一个 $x \in X$ 及每个 $\alpha \in K$, 总有 X 中的一个元素与之对应, 记作 αx , 即定义了数量乘法, 满足

$$1 \cdot x = x;$$

对任何 $\alpha, \beta \in K, x, y \in X$, 有

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

若 K 为复数域 \mathbf{C} , 则称 X 为复线性空间或复向量空间. 若 K 为实数域 \mathbf{R} , 则称 X 为实线性空间.

线性空间 X 到复数域 \mathbf{C} (这是最简单的向量空间) 的映射 Λ , 若满足

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y, \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha, \beta \in K,$$

称 Λ 为一个线性泛函。线性泛函就是 X 上满足以上所示的条件的一个复函数。

例如 $L^1(X, \mu)$ 是一个线性空间，而映射

$$f \longrightarrow \int_X f d\mu$$

是 $L^1(X, \mu)$ 上的一个线性泛函。

定义18. 设 f 是拓扑空间 X 上的复函数，集合 $\{x | f(x) \neq 0\}$ 的闭包，叫做 f 的支集。记作 $\text{Supp} f$ ；即

$$\text{Supp} f = \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}.$$

在 X 上具有紧支集的连续复函数的总体记为 $C_c(X)$ 。容易验证 $C_c(X)$ 是一个线性空间。

定理13. (Riesz表示定理) 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间， Λ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函，则在 X 上存在一个包含 X 的一切 Borel 集的 σ -代数 \mathcal{F} ，并存在 \mathcal{F} 上的唯一正测度 μ ，使得

$$(1) \text{ 对每个 } f \in C_c(X), \Lambda f = \int_X f d\mu.$$

$$(2) \text{ 对每个紧集 } K \subset X, \mu(K) < \infty,$$

$$(3) \text{ 对每个 } E \in \mathcal{F}, \mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V, V \text{ 是开集}\}.$$

$$(4) \text{ 对每个开集 } E \text{ 和每个 } E \in \mathcal{F} \text{ 且 } \mu(E) < \infty, \text{ 有}$$

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K), K \subset E, K \text{ 是紧集}\}.$$

$$(5) \text{ 若 } E \in \mathcal{F}, A \subset E, \text{ 且 } \mu(E) = 0, \text{ 则 } A \in \mathcal{F}.$$

定义19. 定义在局部紧 Hausdorff 空间 X 的全体 Borel 集所成的 σ -代数上的测度 μ 称为 X 上的 Borel 测度。若 Borel 集 $E \subset X$ 且 $\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V, V \text{ 为开集}\}$ ，则称 E 为外正则的，若 $E \subset X$ ， $\mu(E) = \sup\{\mu(K) | K \subset E, K \text{ 为紧集}\}$ ，则称 E 为内正则的。如果 X 内的每个 Borel 集同时是外正则和内正则的，则称 Borel 测度 μ 为正则的。

定义20. 若拓扑空间的一个集 E 满足

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_k \text{ 为紧集}, \quad k=1, 2, \dots,$$

则称 E 为 σ -紧的. 若测度空间的集 E 满足

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad \mu(E_k) < \infty, \quad k=1, 2, \dots,$$

则称 E 具有 σ -有限测度.

定理14 (Lusin定理). 设 X 是局部紧的Hausdorff空间, μ 是 X 上的正则Borel测度, f 是 X 上的复可测函数, $\mu(A) < \infty$, 如果 $x \notin A$, $f(x) = 0$. 任给 $\varepsilon > 0$, 则存在一个 $g \in C_c(X)$, 使得

$$\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon,$$

并且总可以使

$$\sup_{x \in X} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

§ 1.9 L^p 空间

定义21. X 是一个具有正测度 μ 的测度空间. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ 是 X 上的可测函数, 对于 $1 \leq p < \infty$, 满足条件

$$\int_X |f(x)|^p d\mu < \infty$$

的可测函数 $f(x)$ 的全体, 记为 $L^p(X, \mu)$ 或简记作 $L^p(\mu)$. 即

$$L^p(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 可测且 } \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty\}.$$

又定义

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{1/p}$$

称 $\|f\|_p$ 为 f 的 L^p -范数.

若 L^p 中两个元素 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 X 上几乎处处相等, 则 $\|f - g\|_p = 0$. 记 $f \sim g$ 当且仅当 $\|f - g\|_p = 0$, 显然这是 $L^p(X, \mu)$ 内的一个等价关系. 通过这个等价关系, 将 $L^p(X, \mu)$ 分成各个等价类, 每一类都由一切与给定的一个函数等价的函数所组成.

对于 $p = \infty$, 定义

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{\alpha \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$$

为 $f(x)$ 的本性最大范数。若 $\{\alpha \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$ 为空集，则命 $\|f\|_{\infty} = \infty$ 。

定义 $L^{\infty}(X, \mu)$ 为：

$$L^{\infty}(X, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 可测, 且 } \|f\|_{\infty} < \infty\}.$$

下面讨论 $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ 的性质，先给出两个重要的不等式。

定理15. 设 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 即 p 和 q 是共轭指数。 X 是一个具有测度 μ 的测度空间, f 和 g 都是 $X \rightarrow [0, \infty)$ 的可测函数, 则有

$$(1) \int_X fg d\mu \leq \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{1/p} \left\{ \int_X g^q d\mu \right\}^{1/q}.$$

称之为 Hölder 不等式。当 $p=q=2$ 时也称为 Schwarz 不等式。

$$(2) \left\{ \int_X (f+g)^p d\mu \right\}^{1/p} \leq \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int_X g^p d\mu \right\}^{1/p}.$$

称之为 Minkowski 不等式。

证(1) 若不等式右端中的任一个因子为 ∞ , 则不等式显然成立。若右端有一个因子为零, 例如 $\int_X f^p d\mu = 0$ 则 $f=0$ a.e. 因此 $fg=0$ a.e., 所以不等式成立。因此只需考虑 $0 < \int_X f^p d\mu < \infty$, $0 < \int_X g^q d\mu < \infty$ 的情形。

$$\text{令 } F = \frac{f}{\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}}, \quad G = \frac{g}{\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}},$$

则 $\int_X F^p d\mu = 1$, $\int_X G^q d\mu = 1$ 。只需证 $\int_X F \cdot G d\mu \leq 1$ 。

设 $x \in X$ 使得 $0 < F(x) < \infty$, $0 < G(x) < \infty$, 则存在实数 a 和 b 使得 $F(x) = e^{a/p}$, $G(x) = e^{b/q}$ 。又 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 由指数函数的凸性, 有

$$e^{a/p + b/q} \leq \frac{e^a}{p} + \frac{e^b}{q},$$

即
$$F(x) \cdot G(x) \leq \frac{F(x)^p}{p} + \frac{G(x)^q}{q}, \quad \forall x \in X.$$

积分得

$$\int_X F(x)G(x) d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

将 F, G 的表示式代入, 即得所证.

(2) 记 $(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1},$

利用 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^p d\mu &\leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} + \\ &+ \left(\int_X g^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

又 $(p-1)q = p$, 上式给出

$$\begin{aligned} \int_X (f+g)^p d\mu &\leq \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{1/q} \left\{ \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} + \right. \\ &\left. + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{1/p} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $\int_X (f+g)^p d\mu = 0$ 或 $\int_X f^p d\mu$ 与 $\int_X g^p d\mu$ 中有一个为

∞ , 则 Minkowski 不等式自然成立. 因此只需考虑 $\int_X (f+g)^p d\mu$

$\neq 0$ 且 $\int_X f^p d\mu$ 及 $\int_X g^p d\mu$ 为有限的情形. 由函数 t^p 的凸性知

$$\left(\frac{f+g}{2} \right)^p \leq \frac{1}{2} (f^p + g^p),$$

故此时 $\int_X (f+g)^p d\mu$ 为有限的. 这样用 (3) 式右端第一个因式除

(3) 式两端, 并注意 $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, 即得所证.

定理16. 对于 $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X, \mu)$ 是一个线性空间, 且

$$(1) \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p(X, \mu),$$

$$(2) \quad \|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p, \quad f \in L^p(X, \mu), \alpha - \text{复数}.$$

证 当 $1 < p < \infty$, 由Minkowski不等式得

$$\begin{aligned} \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} &\leq \left(\int_X (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

即得(1)式. 当 $p = 1$ 或 $p = \infty$, 由 $|f+g| \leq |f| + |g|$, (1)式显然成立. 由此知当 $f \in L^p(X, \mu)$, $g \in L^p(X, \mu)$, 则 $f+g \in L^p(X, \mu)$.

(2)显然成立, 即 $f \in L^p(X, \mu)$, 则 $\alpha f \in L^p(X, \mu)$.

由此得知 $L^p(X, \mu)$ 为一个线性空间.

若 $f, g, h \in L^p(X, \mu)$, 由以上定理得

$$\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p.$$

这个不等式表明, 若以 $\|f-g\|_p$ 定义 f, g 之间的距离 $d(f, g)$, 则可将 $L^p(X, \mu)$ 看成一个度量空间. 此时 $L^p(X, \mu)$ 不是以函数为元素的空间, 而是一个以函数的等价类为元素的空间. 事实上 $L^p(X, \mu)$ 是一个完备的度量空间.

定理17 对于 $1 \leq p \leq \infty$, 和每一个正测度 μ , $L^p(X, \mu)$ 是一个完备的度量空间.

证 首先假定 $1 \leq p < \infty$, 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(X, \mu)$ 内的一个Cauchy序列, 即对每一个 $\varepsilon > 0$, 都存在整数 $N > 0$, 当 $n > N, m > N$ 时有 $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. 只需证明 $\{f_n\}$ 必在 $L^p(X, \mu)$ 中收敛, 即存在 $f \in L^p(X, \mu)$, 使 $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

因为 $\{f_n\}$ 是Cauchy列, 则存在一个子序列 $\{f_{n_i}\}$, 使得

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < \frac{1}{2^i}, \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

定义

$$g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

则 $g_i \in L^1(X, \mu)$, 且由Minkowski不等式知

$$\|g_k\|_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} < 1.$$

再由Fatou引理, 得出 $\|g\|_1 < 1$. 特别地, 几乎处处有 $g(x) < \infty$. 所以级数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) \quad (4)$$

对几乎所有的 $x \in X$ 是绝对收敛的. 定义

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \dots, & x \text{ 为 (4) 式的收敛点,} \\ 0, & x \text{ 使 (4) 式发散.} \end{cases}$$

显然

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x), \quad a.e.$$

下面再证明 f 是 $\{f_n\}$ 的 L^1 -极限. 即 $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$, 且 $f \in L^1(X, \mu)$.

$$\begin{aligned} \text{因为 } |g_m(x) - g_k(x)| &= |f_{n_m} - f_{n_{m-1}}| + \dots + |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \\ &\geq |f_{n_m} - f_{n_k}|, \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$ 则得

$$|f - f_{n_k}| \leq |g(x) - g_k(x)|,$$

又 $g_k(x)$ 是单调增加的, 所以

$$|f - f_{n_k}| \leq 2g(x).$$

而 $g(x) \in L^1(X, \mu)$, 且 $\lim_{i \rightarrow \infty} \|f - f_{n_i}\|_1 = 0$ (几乎处处),

由Lebesgue控制收敛定理有

$$\|f - f_{n_k}\|_p \rightarrow 0,$$

所以 $f - f_{n_k} \in L^p$. 又 $f_{n_k} \in L^p$, 故 $f(x) \in L^p$.

再回到原序列 $\{f_n\}$. 由于 $\{f_n\}$ 是Cauchy列, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$. 当 $n, m > N$ 有 $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$. 于是由Fatou引理, 对每一个 $m > N$ 有

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m|^p d\mu < \varepsilon^p,$$

即当 $m \rightarrow \infty$ 时有 $\|f - f_m\|_p \rightarrow 0$. 即 $L^p(X, \mu)$ 当 $1 \leq p < \infty$ 是完备的.

再考虑 $p = \infty$ 的情形. 设 $\{f_n\}$ 是 L^∞ 内的Cauchy列. 记

$$A_k = \{x \in X \mid |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\} \quad k=1, 2, \dots,$$

$$B_{m,n} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}, \quad m, n=1, 2, \dots$$

则集合 $A_k, B_{m,n}$ 的测度为零. 令 E 为所有 $A_k, B_{m,n}$ 的并集. 即

$$E = \left(\bigcup_k A_k \right) \cup \left(\bigcup_{m,n} B_{m,n} \right),$$

则 $\mu(E) = 0$, 并且在 E^c 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于有界函数 f . 若在 E 上定义 $f(x) = 0$, 则 $f \in L^\infty(X, \mu)$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad a.e.$$

同时

$$\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0,$$

故 $L^\infty(X, \mu)$ 是完备的.

由以上证明过程看出, 下面的结论是成立的.

定理18. 若 $\{f_n\}$ 是 $L^p(X, \mu)$ 内的Cauchy序列 ($1 \leq p \leq \infty$), f 是 $\{f_n\}$ 的 L^p -极限, 则 $\{f_n\}$ 存在一个子序列, 它几乎处处收敛于 $f(x)$.

下面给出 $L^p(X, \mu)$ 空间的性质. 若 $f: X \rightarrow [0, \infty]$ 是可测函数, 对于 $n=1, 2, \dots$ 及 $1 \leq i \leq n2^n$, 定义

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]\right) \quad \text{及} \quad F_n = f^{-1}([n, \infty)).$$

$$\text{令} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n} \quad (5)$$

容易看出, s_n 为简单可测函数且满足

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f,$$

$$\text{且} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

事实上, 若 x 使得 $f(x) < \infty$, 则当 n 足够大时, $s_n \geq f(x) - 2^{-n}$, 若 x 使得 $f(x) = \infty$, 则 $s_n(x) = n$. 故 $n \rightarrow \infty$ 时 $s_n(x) \rightarrow f(x)$. 这就是说 X 上的可测函数 $f(x)$ 可以用 X 上的简单可测函数 s_n 来逼近.

定理19. 设 S 是 X 上的满足如下条件的复可测简单函数 s 构成的函数类:

$$\mu(\{x: s(x) \neq 0\}) < \infty.$$

若 $1 \leq p < \infty$, 则 S 在 $L^p(X, \mu)$ 内是稠密的.

证 首先 $S \subset L^p(X, \mu)$ 是显然的. 若 $f \in L^p(X, \mu), f \geq 0$, 令 s_n 为 (5) 式所给的序列. 由于 $0 \leq s_n \leq f$, 有 $s_n \in L^p(X, \mu)$. 因此 $s_n \in S$. 又

$$|f - s_n|^p \leq f^p$$

由控制收敛定理知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|f - s_n\|_p \rightarrow 0$. 即 f 属于 S 的 L^p -闭包. 对于一般复可测函数同样得证.

定理20. 设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 空间, μ 是 X 的 σ -代数 \mathcal{B} 上的正则 Borel 测度, 则对 $1 \leq p < \infty$, $C_c(X)$ 在 $L^p(X, \mu)$ 内稠密.

证 如定理19. 作简单函数的集合 S . 由 Lusin 定理知, 若 $s \in S$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个函数 $g \in C_c(X)$, 使得除去一个测度小于 ε 的集外 $g(x) = s(x)$, 并且 $\|g\| \leq \|s\|_\infty$. 因此,

$$\|g - s\|_p \leq 2\varepsilon^{1/p} \|s\|_\infty.$$

又 S 在 $L^p(X, \mu)$ 内稠密, 故 $C_c(x)$ 在 $L^p(X, \mu)$ 中稠密.

定理20说明, 若 $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X, \mu)$ 是赋予 $C_c(x)$ 以 L^p -距离所得的度量空间的完备化.

第二章 Banach空间

本章介绍Banach空间的几个重要定理,并通过它们的具体应用导出分析方面的一些重要结论。首先给出赋范线性空间上的Hahn-Banach定理,利用它导出Poisson积分公式;再借助于完备性概念,通过完备度量空间的Baire定理,给出Banach空间的两个重要定理:Banach-Steinhaus定理及开映射定理,并通过Banach-Steinhaus定理导出有关三角级数的一些结论。

§ 2.1 Banach空间

定义 1 一个复向量空间 X 称为赋范线性空间,如果对于每一个 $x \in X$,对应一个实数 $\|x\|$ 称为 x 的范数,满足

$$(1) \|x\| \geq 0, \text{ 且 } \|x\| = 0 \text{ 当且仅当 } x = 0;$$

$$(2) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

$$(3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{C}.$$

利用范数可以定义 X 中两个元素 x, y 的距离; $d(x, y) = \|x - y\|$,这表明每个赋范线性空间都可以看成一个度量空间。

若一个赋范线性空间在其范数所定义的度量下是完备的,则称该空间为Banach空间。

例 1 若 X 是一个拓扑空间(例如 X 是实数域或复数域),考虑定义在 X 上的所有有界连续函数 $C(X)$,则 $C(X)$ 是一个线性空间,有

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in C(X),$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall f \in C(X), \alpha \in \mathbb{K}$$

现定义范数, 记作 $\|f\|_{\infty}$:

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|, x \in X\}.$$

容易验证 $\|f\|_{\infty}$ 满足范数的三个条件, 若 $\{f_n\}$ 为 Cauchy 列, 则按所定义的范数, f_n 收敛于 f 为一致收敛, 故 $f(x)$ 仍为连续函数, 所以 $C(X)$ 是完备的. 这表明 $C(X)$ 对于这样的范数是一个 Banach 空间.

例 2 实数域 R 上的可测函数 f , 满足条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p dx < \infty$ ($1 \leq p < +\infty$), 构成线性空间 $L^p(R)$; 若引入范数

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

则由第一章知 $L^p(R)$ 是一个 Banach 空间.

定义 2 设 $g(x)$ 是赋范线性空间 X 上的线性泛函 (简记作 $g(x): X \rightarrow C$), 定义 g 的范数为

$$\|g\| = \sup \left\{ \frac{|g(x)|}{\|x\|}, x \neq 0, x \in X \right\},$$

若 $\|g\| < \infty$, 则称 g 为有界线性泛函.

容易证明

$$\begin{aligned} \|g\| &= \sup\{|g(x)|, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|g(x)|, \|x\| \leq 1\} \\ &= \inf\{c, |g(x)| \leq c\|x\|\}. \end{aligned}$$

由以上定义显然有 $|g(x)| \leq \|g\| \|x\|$, 由此容易得到以下结论.

定理 1 若 $g(x): X \rightarrow C$ 为一线性泛函, 则上面三个条件中的每一个蕴涵着另外两个:

- (1) g 是有界的;
- (2) g 是连续的;
- (3) g 在 X 的某个点上是连续的.

证 由于 $|g(x_1 - x_2)| \leq \|g\| \|x_1 - x_2\|$, 即 $|g(x_1) - g(x_2)|$

$\leq \|g\| \|x_1 - x_2\|$, 显然(1)蕴涵着(2), (2)蕴涵着(3)是自然的. 由(3), 若 g 在 $x_0 \in X$ 点连续, 则对每个 $\varepsilon > 0$, 可以找到 $\delta > 0$, 当 $\|x - x_0\| < \delta$, 则 $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$, 换言之, $\|x\| < \delta$ 蕴涵着

$$|g(x)| = |g(x_0 + x) - g(x_0)| < \varepsilon,$$

因而 $\|g\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ 即(3)蕴涵着(2). 证毕.

若 X, Y 为两个赋范线性空间, A 是 X 到 Y 的线性变换, 则 A 的范数定义为

$$\|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in X, x \neq 0 \right\},$$

其中 $\|x\|$ 是 X 中的范数, $\|Ax\|$ 是 Y 中的范数. 若 $\|A\| < \infty$, 则称 A 为有界线性变换.

§ 2.2 Hahn-Banach定理

定理 2 设 X 是赋范线性空间, N 是 X 的一个子空间, $f(x)$ 是 N 上的一个有界线性泛函($f(x): N \rightarrow \mathbf{C}$), 则存在一个 X 上的有界线性泛函 $F(x)$ ($F(x): X \rightarrow \mathbf{C}$), 使得当 $x \in N$ 时 $F(x) = f(x)$, 且 $\|F\| = \|f\|$. 我们称 F 为 f 的扩张.

证 (1)首先假设 X 是实数域 \mathbf{R} 上的赋范线性空间, 此时 f 是 $N \rightarrow \mathbf{R}$ 的实有界线性泛函. 今证存在一个 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的扩张.

若 $\|f\| = 0$ 即 $f(x) = 0, \forall x \in N$, 则取 $F = 0$, F 就是 f 的扩张.

若 $\|f\| \neq 0$, 可以假定 $\|f\| = 1$, 因若 $\|f\| \neq 1$, 考虑 $\frac{f}{\|f\|}$ 的扩张 F , 则 $F_1 = \|f\| F$ 即为 f 的扩张.

先将 X 的子空间 N 扩张一维, 取 $x_0 \in X$ 但 $x_0 \notin N$, 考虑 $N_1 = \{n + \alpha x_0 | n \in N, \alpha \in \mathbf{R}\}$, N_1 是由 x_0 和 N 张成的空间, 显然 $N_1 \supsetneq N$. 现在找一个 N_1 上的线性泛函 G , 使得 $G(x) = f(x), \forall x \in N$, 且 $\|G\|$

$= \|f\| = 1$. 利用 G 是线性的, 有

$G(n+ax_0) = G(n) + \alpha G(x_0) = f(n) + \alpha G(x_0) = f(n) + \alpha r$,
其中 $r \in \mathbf{R}$. 这样得到的 G 显然是 N_1 上的线性泛函且 $G(n) = f(n)$.
现在的问题是如何选取 r 使 $\|G\| = 1$.

由于 G 是 f 的扩张, 故 $\|G\| \geq \|f\| = 1$, 故只需选取 r 使得

$$|f(n) + \alpha r| \leq \|n + \alpha x_0\| \quad \forall n \in N, \forall \alpha \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

成立. 当 $\alpha = 0$, $|f(n)| \leq \|n\|$ 显然成立. 当 $\alpha \neq 0$, 令 $n = \alpha n'$.
则(1)式成为

$$\begin{aligned} |f(\alpha n') + \alpha r| &= |\alpha| |f(n') + r| \leq \|\alpha n' + \alpha x_0\| \\ &= |\alpha| \|n' + x_0\|, \quad \forall n \in N, \forall \alpha \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad |f(n') + r| \leq \|n' + x_0\|, \quad \forall n \in N.$$

此式归结为

$$\begin{aligned} r &\leq -f(n') + \|n' + x_0\| = A_n', \quad \forall n' \in N; \\ r &\geq -f(n') - \|n' + x_0\| = B_n', \quad \forall n' \in N. \end{aligned}$$

为此需证明存在 $r \in \mathbf{R}$ 使得对一切 $m, n \in N$ 有

$$B_m \leq r \leq A_n$$

也就是说, 当且仅当对所有的 $m, n \in N$ 有 $B_m \leq A_n$ 时, r 才能存在. 但是

$$\begin{aligned} f(n) - f(m) &= f(n-m) \leq \|n-m\| = \|n+x_0-m-x_0\| \\ &\leq \|n+x_0\| + \|-m-x_0\|, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad -f(m) - \|m+x_0\| \leq -f(n) + \|n+x_0\|$$

对一切 m, n 恒成立, 所以 r 存在. 这就证明了 G 是 f 在 N_1 上的扩张.

考虑集族 $\{(N^d, f^d)\}$, 其中 $N^d \supset N$ 且为 X 的子空间, f^d 是 $N^d \rightarrow \mathbf{R}$ 的线性泛函满足 $f^d(x) = f(x)$, $\forall x \in N$, 且 $\|f^d\| = 1$, 则 $(N_1, G) \in \{(N^d, f^d)\}$, 故 $\{(N^d, f^d)\}$ 是非空的.

在 $\{(N^d, f^d)\}$ 上定义序: $(N^{d1}, f^{d1}) \prec (N^{d2}, f^{d2})$ 是指 $N^{d1} \subset N^{d2}$, 而且当 $x \in N^{d1}$ 时, $f^{d2}(x) = f^{d1}(x)$. 显然 $\{(N^d, f^d)\}$ 是半序的. 今取链 $\{(N^{d\alpha}, f^{d\alpha}), \alpha \in A\}$, 则可以找到一个上界 (\tilde{N}, \tilde{f}) , 其中 $\tilde{N} = \bigcup N^{d\alpha}$ 因为 $\{N^{d\alpha}\}$ 是一个链, 故 \tilde{N} 仍然是 X 的一个子空间, \tilde{f} 是 $\tilde{N} \rightarrow \mathbf{R}$ 的线性泛函且 $\tilde{f}(x) = f^{d\alpha}(x)$, 当 $x \in$

N^{A^0} . 则显然 \tilde{f} 是线性的, 且 $|\tilde{f}(x)| = |f^{A^0}(x)| \leq \|x\|$, 所以 $\|\tilde{f}\| \leq 1$. 又 \tilde{f} 是 f^{A^0} 的扩张, 因此 $\|\tilde{f}\| \geq \|f^{A^0}\| = 1$. 故 $\|\tilde{f}\| = 1$. 由 Zorn 引理知 $\{(N^A, f^A)\}$ 有一个极大元素 (M, F) . 可以断言 $M = X$. 否则可按以上方法找到一个 $x_0 \in X$, 但 $x_0 \notin M$, 再将 M 扩充一维, 得到一个包含 M 及 x_0 的空间, 从而将线性泛函 F 再扩张. 这与 (M, F) 是极大元素是矛盾的. 故 $M = X$.

以上证明了 Hahn-Banach 定理对实数域上的赋范线性空间是成立的.

(2) 设 X 是复数域 \mathbb{C} 上的赋范线性空间. f 是 $N \rightarrow \mathbb{C}$ 的有界线性泛函. 设 u 是 f 的实部, 容易验证 $u(x)$ 为实线性泛函, 即 $u(x+y) = u(x) + u(y)$, $\forall x, y \in N$, 且 $u(ax) = au(x)$, $\forall x \in N, \forall a \in \mathbb{R}$. 且 $|u(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$. 故 $\|u\| \leq \|f\|$. $u(x)$ 是有界的.

$$\begin{aligned} f(ix) &= u(ix) + iv(ix) = if(x) = i(u(x) + iv(x)) \\ &= -v(x) + iu(x), \end{aligned}$$

所以 $v(x) = -u(ix)$.

于是有 $f(x) = u(x) - iu(ix)$.

又 $u(x)$ 是 $N \rightarrow \mathbb{R}$ 的有界线性泛函, 利用 (1) 的结论得到 u 的扩张 $U(x)$, $U(x)$ 是 $X \rightarrow \mathbb{R}$ 的线性泛函, 且当 $x \in N$, $U(x) = u(x)$, 同时 $\|U\| = 1$.

今定义

$$F(x) = U(x) - iU(ix), \quad x \in X$$

容易验证 F 是 X 上的复线性泛函. 首先, 显然有

$$F(x+y) = F(x) + F(y).$$

再证 $F(ax) = aF(x)$, $\forall a \in \mathbb{C}, x \in X$. 成立.

$$\begin{aligned} \text{当 } \beta \in \mathbb{R}, F(\beta x) &= U(\beta x) - iU(i\beta x) = \beta U(x) - i\beta U(ix) \\ &= \beta(U(x) - iU(ix)) = \beta F(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } F(ix) &= U(ix) - iU(-x) = U(ix) + iU(x) = i(U(x) - iU(ix)) \\ &= iF(x). \end{aligned}$$

对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$, 令 $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. 则有

$$\begin{aligned} F(ax) &= F(a_1x + ia_2x) = F(a_1x) + F(ia_2x) \\ &= a_1F(x) + iF(a_2x) = a_1F(x) + ia_2F(x) = aF(x) \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 是 $X \rightarrow \mathbb{C}$ 的线性泛函.

当 $x \in N$, 时 $U(x) = u(x)$, 显然有 $F(x) = f(x)$.

又 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的扩张, 所以 $\|F\| \geq \|f\|$. 另外取 $\theta = -\arg F(x)$, 则

$$\begin{aligned} |F(x)| &= e^{i\theta} F(x) = F(e^{i\theta}x) = U(e^{i\theta}x) \leq \|U\| \|e^{i\theta}x\| \\ &= \|U\| |e^{i\theta}| \|x\| = \|U\| \|x\| = \|u\| \|x\| \\ &\leq \|f\| \|x\|. \end{aligned}$$

所以

$$\|F\| \leq \|f\|,$$

由此推出

$$\|F\| = \|f\|.$$

Hahn-Banach 定理得证.

§ 2.3 Hahn-Banach 定理的应用—Poisson 积分

为将 Hahn-Banach 定理应用于具体问题, 需要借助于赋范线性空间上有界线性泛函的知识.

如果 X 是一个赋范线性空间, X 上全体有界线性泛函的集族记作 X^* , 则 X^* 是不空的. 因为泛函 $f: X \rightarrow 0$ 是 X^* 中的一个元素. 在 X^* 中规定加法和数的乘法如下: 假设 $f, g \in X^*$, 令

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(af)(x) = af(x);$$

则 X^* 是一个线性空间. 又 X^* 上定义了范数 $\|f\|$, 所以 X^* 仍是一个赋范线性空间, 事实上 X^* 是一个 Banach 空间: 称 X^* 为 X 的共轭空间.

定理 3 设 X 是一个赋范线性空间, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, 则存在一个 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = 1$, 且 $f(x_0) = \|x_0\|$.

证 考虑一维线性空间 $A = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$, 作 A 上泛函 $g(x)$:

$$g(ax_0) = a \|x_0\|, \quad x \in C;$$

则 g 是 A 上的有界线性泛函且 $\|g\| = 1$. 由 Hahn-Banach 定理, 存在一个 $f \in X^*$, 使得 $f|_A = g$, 且 $\|f\| = 1$, 同时 $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$. 定理得证.

定理说明, 对于任何一个不等于零的向量, 都可以找到一个范数为 1 的有界线性泛函, 将其映射到自己的范数上.

推论 1 若 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$, 则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.

证 令 $x_0 = x - y$, 则 $x_0 \neq 0$. 由定理 3 知, 存在 $f \in X^*$ 使 $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$, 即 $f(x - y) = f(x) - f(y) \neq 0$, 所以 $f(x) \neq f(y)$.

这个推论说明 X^* 在 X 上是分离两点的.

推论 2 对于 $x \in X$, 有

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1\}.$$

证 $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|, \because \|f\| = 1$.

所以

$$\sup\{|f(x)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1\} \leq \|x\|.$$

但由定理 3 知, 对于 $x_0 \neq 0$, 可以找到一个 $f(x)$, 使 $f(x_0) = \|x_0\|$, 且 $\|f\| = 1$, 即至少可以找到一个 $f \in X^*$, 使 $|f(x)| = \|x\|$, 所以

$$\sup\{|f(x)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1\} \geq \|x\|.$$

由此得 $\|x\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in X^*, \|f\| = 1\}$.

推论 2 表明, 对于固定的 $x \in X$, 映射 $f \rightarrow f(x)$ 是 X^* 上一个范数为 $\|x\|$ 的有界线性泛函, 这个事实说明了 X 与 X^* 之间的相互对应关系.

下面通过 Hahn-Banach 定理导出 Poisson 积分公式.

设 K 是紧 Hausdorff 空间, H 是 K 的紧子集, A 是 K 上连续泛函 $C(K)$ 的子空间, 满足

$$(1) \quad 1 \in A, \quad 1 \text{ 是指 } 1(x) = 1, \quad \forall x \in K,$$

$$(2) \quad \|f\|_K = \|f\|_H, \quad \forall f \in A.$$

其中 $\|f\|_K = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$, $\|f\|_H = \sup\{|f(x)| \mid x \in H\}$.

记 $M = \{f|_H, f \in A\}$, 则得定义在 H 上的连续泛函 $C(H)$ 的子集合 M , 又 M 的每一个元素都有唯一的一个开拓使之成为 A 的元素: 这是因为 $|f(x)| \leq \|f\|_H$, 故若对 $y \in H$, 有 $f(y) = 0$, 则必对每一个 $x \in K$ 有 $f(x) = 0$. 这样就得到 M 与 A 之间的一个一一对应, 且为保范的.

固定 $x \in K$, 作集合 M 到复数域 C 上的映射 γ :

$$\gamma: f \rightarrow f(x), f \in M, f(x) \in C.$$

则 γ 是 M 上的有界线性泛函. 由 $|f(x)| \leq \|f\|_M$ 知 $\|\gamma\| \leq 1$, 又由条件 (1) 知 $\gamma(1) = 1(x) = 1$, 所以 $\|\gamma\| = 1$. 因为 M 是 $C(H)$ 的子空间, 在其上定义了有界线性泛函 γ , 由 Hahn-Banach 定理知, 存在着 $C(H)$ 上的有界线性泛函 Φ , 使得 $\Phi|_M = \gamma$ 且 $\|\Phi\| = 1$. 即

$$\Phi(f) = f(x), \forall f \in M.$$

显然 $\Phi(1) = 1$.

下面证明 $\Phi(1) = 1, \|\Phi\| = 1$ 蕴涵着 Φ 是 $C(H)$ 上的正线性泛函, 即对于 $f \geq 0$ 有 $\Phi(f) \geq 0$, 取 $f \in C(H)$, 由于 f 在紧集上是有界的, 不妨设 $0 \leq f \leq 1$, 并令 $g = 2f - 1$, 则 $-1 \leq g \leq 1$, 对于任意的实数 r , 都有 $|g + ir|^2 \leq 1 + r^2$. 故令 $\Phi(g) = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, 则

$$\Phi(g + ir) = \alpha + i\beta + i\Phi(r) = \alpha + i\beta + ir\Phi(1) = \alpha + i(\beta + r).$$

$$\text{故 } |\Phi(g + ir)|^2 = \alpha^2 + (\beta + r)^2 \geq (\beta + r)^2.$$

另一方面, $\|\Phi\| = 1$, 所以

$$|\Phi(g + ir)|^2 \leq |g + ir|^2 \leq 1 + r^2.$$

于是得到 $1 + r^2 \geq (\beta + r)^2$, 即 $1 \geq 2\beta r + \beta^2$, 对一切实数 r 成立, 从而必然有 $\beta = 0$, 即 $\Phi(g) = \alpha$, 又

$$|\alpha| = |\Phi(g)| \leq \|g\| \leq 1.$$

所以

$$\Phi(f) = \Phi\left(\frac{1}{2}(1 + g)\right) = \frac{1}{2}(1 + \Phi(g)) = \frac{1}{2}(1 + \alpha) > 0.$$

这就证明了 ϕ 为 $C(H)$ 上正线性泛函. 由第一章Riesz表示定理知, 在 H 上存在一个正则的、正的Borel测度 μ_x , 使得

$$\phi(f) = \int_H f d\mu_x, \quad f \in C(H).$$

特别. 若 $f \in A$ 有

$$f(x) = \int_H f d\mu_x. \quad (2)$$

这样就证明了对每个 $x \in K$, 在 H 上存在一个正测度 μ_x , 通过(2)式用 μ_x 表示了 $f(x)$.

注意有了 ϕ 以后, 就唯一确定了 μ_x , 但 ϕ 是由 ν 扩张而得到的, Hahn-Banach定理并不保证扩张的唯一性, 因而 μ_x 不必是唯一的.

$$\begin{aligned} \text{令 } U &= \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}, \bar{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}, \\ T &= \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}. \end{aligned}$$

取 $K = \bar{U}$, 由于 \bar{U} 是复数域上的有界闭集, 故为紧的. 令 $H = T$, 即 H 为 U 的边界. 取 A 为 K 上的所有的多项式, 显然为连续的. 容易验证 A 满足以上条件(1), (2); 因为

(1) $1(x) = 1 \in A$ (零次多项式).

(2) 若 $f \in A$ 则 $\|f\|_K = \|f\|_{\bar{U}} = \|f\|_H = \|f\|_T$. 这是由解折函数的最大模原理给出的.

若取 $z \in U$, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ 由以上结论知存在正则Borel测度 μ_z , 使得

$$f(z) = \int_T f d\mu_z, \quad (f \in A).$$

今取多项式 $u_n(z) = z^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $u_n \in A$, 代入上式得

$$r^n e^{in\theta} = \int_T u_n d\mu_z, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

又在 T 上 $u_{-n} = \overline{u_n}$ 所以

$$r^n e^{-in\theta} = \int_T u_{-n} d\mu_z, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

二者合并写成

$$r^{|n|} e^{in\theta} = \int_T u_n d\mu_z, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{令 } P_r(\theta-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}, \quad t \in R. \quad (3)$$

因 $|r| < 1$, 故级数绝对收敛, 乘以 e^{ikt} 逐项积分得,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) e^{ikt} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in\theta} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt.$$

因为

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t} dt = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \neq k; \\ 2\pi, & \text{当 } n = k. \end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) e^{ikt} dt = r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

$$\text{即 } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) e^{int} dt = \int_T u_n d\mu_z, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

又 $u_n = z^n$, 也就是

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(e^{int}) dt = \int_T f d\mu_z.$$

对 $f = u_n$ 成立, 因此对每个三角多项式 f 也成立; 再根据 Fourier 级数理论知, 上式对一切连续函数都成立, 此时 μ_z 由 (2) 式唯一决定.

特别若取 $f \in A$, 得

$$f(z) = \int_T f d\mu_z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t) f(e^{it}) dt.$$

将(3)式中级数求和得

$$P_r(\theta-t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

代入上式, 即得Poisson积分公式.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(e^{it}) dt, \quad (z=re^{i\theta})$$

对每个 $f \in A$, $z \in U$ 都成立. 这个公式说明 $f(z)$ 在 U 上的函数值可以由它在边界上的值所确定.

注意, 还可以将 A 扩大, 只要 A 满足条件(1)、(2)即可. 例如可以考虑任意的解析函数.

§ 2.4 完备度量空间的两个定理

定义 3 集合 $E \subset X$ 称为无处稠密的, 如果它的闭包 \overline{E} 不包含 X 的非空开集, 即 \overline{E} 不包含内点.

定义 4 若集合 E 是可数个无处稠密的集合的并, 即若 E_n ($n=1, 2, \dots$) 为无处稠密的, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 E 称为第一纲的, X 的其它集合称为第二纲的.

定理 4 (Baire定理), 设 X 是完备度量空间, $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ 是 X 中的稠密开子集, 则其交集 $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 在 X 中稠密.

证 取 $W \neq \phi$ 是 X 的任一开集, 必须证明 $(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) \cap W \neq \phi$.

设 ρ 是 X 的度量, 记

$$S(x, r) = \{y \in X, \rho(x, y) < r\},$$

并记 $\overline{S}(x, r)$ 为 $S(x, r)$ 的闭包。

由假设 V_1 是稠密的, $V_1 \cap W \neq \emptyset$, 又 V_1 是开集, 故 $V_1 \cap W$ 是开集。因此存在 $x_1 \in X$ 及实数 r_1 , $0 < r_1 < 1$, 使得

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset V_1 \cap W. \quad (4)$$

由 V_2 的稠密性, 得 $V_2 \cap S(x_1, r_1) \neq \emptyset$, 且 $V_2 \cap S(x_1, r_1)$ 是开集。于是存在 $x_2 \in X$, 及实数 r_2 , $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ 使得

$$\overline{S}(x_2, r_2) \subset V_2 \cap S(x_1, r_1).$$

继续以上作法, 若 x_n, r_n 已选出, $x_n \in X$, $0 < r_n < \frac{1}{n}$, 由 V_{n+1} 的稠密性, 得到 $x_{n+1} \in X$, $0 < r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, 使得

$$\overline{S}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset V_{n+1} \cap S(x_n, r_n). \quad (5)$$

考虑序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, 当 $i, j > n$ 时 x_i, x_j 皆在 $S(x_n, r_n)$ 内, 故 $\rho(x_i, x_j) < \frac{2}{n}$, 从而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 根据度量空间的完备性知, 存在 $x \in X$, 使 $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

由以上作法知

$$\overline{S}(x_1, r_1) \supset \overline{S}(x_2, r_2) \supset \dots \supset \overline{S}(x_n, r_n) \supset \dots,$$

即 $x_m \in \overline{S}(x_k, r_k)$, $m \geq k, k = 1, 2, \dots$

又 $\overline{S}(x_k, r_k)$ 是闭集合, 所以 $x \in \overline{S}(x_k, r_k)$, $k = 1, 2, \dots$.

再由 (5) 式知, $x \in V_k$, $k = 1, 2, \dots$. 因此 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$. (4) 式表明

$x \in W$, 故 $x \in \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k \right) \cap W$. 即 $\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k$ 是稠密的。

推论 3 在完备度量空间中, 任意可数个稠密的 G_δ 集之交还是稠密的 G_δ 集。

定理 5 完备度量空间是第二纲的。

证 用反证法。假设完备度量空间 X 是第一纲的, 即 X 是可数个无处稠密集 K_n 的并集, 即

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

则

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}.$$

取余集得

$$\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}^c.$$

因为 K_n 无处稠密 $\overline{K_n}$ 不包含任何非空开集, 所以 $\overline{K_n}^c$ 是稠密的, 又 $\overline{K_n}^c$ 是开集, 由Baire定理知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}^c$ 是稠密的, 与 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K_n}^c = \phi$

矛盾。故 $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, 即 X 是第二纲的。证毕。

§ 2.5 Banach-Steinhaus定理

定理 6 (Banach-Steinhaus定理, 共鸣定理)

设 X 是Banach空间, Y 是赋范线性空间, $\{A_\alpha\}$ 是 X 到 Y 的一族有界线性算子。 α 取值于某个指标集 A 。则下面结论之一成立。

(1) 或者存在 $M > 0$, 使得

$$\|A_\alpha\| \leq M, \quad \forall \alpha \in A;$$

(2) 或者存在一个稠密的 G_δ 集 V , 使得

$$\sup_{\alpha} \|A_\alpha x\| = \infty, \quad \forall x \in V.$$

证 $\|A_\alpha\| = \sup \left\{ \frac{\|A_\alpha x\|}{\|x\|} \mid x \neq 0 \right\}.$

令 $\varphi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|A_\alpha x\|, \quad x \in X.$

作集合 $V_n = \{x \in X \mid \varphi(x) > n\}$, $n=1, 2, \dots$

因为 A_α 是 X 到 Y 的有界线性算子, 故为连续的. 又 $\|A_\alpha x\|$ 是 Y 上的连续函数, 所以 $X \rightarrow \|A_\alpha x\|$ 是 X 到 \mathbb{R} 的连续映射. 因此 φ 是下半连续的, 并且 V_n 为开集.

下面讨论两种情形.

(1) 假设对某一个 N , V_N 不稠密于 X , 则 $\overline{V_N} \neq X$, 故必存在一个非空开集 W , 使得 $W \cap \overline{V_N} = \emptyset$, 于是有

$\overline{V_N}^c \supset W \supset \overline{S}(x_0, r)$, r 为某一确定常数. 当 $x \notin V_N$ 则 $\varphi(x) \leq N$, 即 $\|A_\alpha x\| \leq N$, $\forall \alpha \in A$. 因为 $\overline{S}(x_0, r) \subset \overline{V_N}^c$, 故 $x_0 \in \overline{V_N}^c$, 即 $x_0 \notin V_N$. 所以

$$\|A_\alpha x_0\| \leq N, \quad \forall \alpha \in A.$$

当 $\|x\| \leq r$ 则 $x+x_0 \in \overline{S}(x_0, r)$, 所以 $\|A_\alpha(x+x_0)\| \leq N$, 于是

$$\|A_\alpha x\| \leq \|A_\alpha(x+x_0)\| + \|A_\alpha(-x_0)\| \leq 2N.$$

对任意的 $x \in X$, 令 $x' = \frac{x}{\|x\|} r$, 则 $\|x'\| = r$, 所以

$$\|A_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|} r\right)\| \leq 2N, \quad \forall \alpha \in A.$$

即
$$\|A_\alpha x\| \leq \frac{2N}{r} \|x\|, \quad \forall \alpha \in A.$$

由此得出 $\|A_\alpha\| \leq \frac{2N}{r}$ 对一切 α 成立. 即结论 1) 对 $M = \frac{2N}{r}$ 成立.

(2) 与(1)相反, 若对一切 n , V_n 在 X 中稠密, 由Baire定理

$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 是 X 中的稠密的 G_δ 集. 取 $x \in V$, 则对一切 n , $x \in V_n$, 即

$\varphi(x) = \infty$. 即存在一个稠密的 G_δ 集 V , 使得

$$\sup \|A_n x\| = \infty, \quad \forall x \in V. \quad \text{定理得证.}$$

这个定理也称为一致有界性原理.

下面借助于Banach-Steinhaus定理讨论连续函数的Fourier级数的收敛问题.

设 T 是单位圆 $T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$. 问题是: 对每一个 $f \in C(T)$, f 的Fourier级数在每一点是否皆收敛于 f ?

显然 $C(T)$ 为Banach空间, 其范数为

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in T\}.$$

为方便起见, 通常将定义在单位圆上的连续实函数 $f(z)$ 用 $z = e^{it}$ 置换为周期为 2π 的实连续函数 $f(e^{it})$, 我们仍记作 $f(t)$.

f 的Fourier系数为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Fourier级数为

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

f 的Fourier级数在 x 点的 n 项和 $S_n(f, x)$ 为

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \quad n=0, 1, 2, \dots.$$

其中

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt}.$$

问题在于判断 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = f(x)$ 是否对每个函数 $f \in C(T)$

和每个实数 x 皆成立. 若在 L^2 空间范数意义下, 已知

$$\|f - S_n\|_2 \rightarrow 0, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty,$$

则由第一章定理18知, 存在 $\{S_n\}$ 的一个子序列, 它几乎处处收敛

于 $f(x)$ ，但并没有回答上面提出的问题。

下面利用Banach-Steinhaus定理解决这个问题，仅考虑 $x=0$ 的情形。引入算子 A_n ：

$$A_n f = S_n(f, 0), \quad f \in C(T).$$

容易验证 A_n 是线性的。下面验证 A_n 有界。

$$\begin{aligned} |A_n f| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |D_n(-t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \|f\|_{\infty} \|D_n\|_{L^1}. \end{aligned}$$

所以

$$\|A_n\| \leq \|D_n\|_{L^1}. \quad (6)$$

因此每个 A_n 是 $C(T)$ 上的有界线性泛函。

下面证明两个事实：

(1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|D_n\|_{L^1} \rightarrow \infty$

(2) $\|A_n\| = \|D_n\|_{L^1}, \quad \forall n.$

先证(1)。由分析知

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{1}{2}t}.$$

$$\begin{aligned} \|D_n\|_{L^1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t|}{\left|\sin \frac{t}{2}\right|} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \geq \frac{2}{\pi} \int_0^x \left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right| \cdot \frac{dt}{t} \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^{\left(n + \frac{1}{2} \right) x} |\sin t| \frac{dt}{t} \\
& > \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt \\
& = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \quad \text{当 } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

再证(2). 因 $D_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{t}{2}}$ 时正时负, 今定义函数

$g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } D_n(t) \geq 0, \\ -1, & \text{当 } D_n(t) < 0. \end{cases}$$

于是 $g(t)D_n(t) = |D_n(t)|$.

又 $g(t)$ 可以用连续函数来逼近, 即存在 $f_j \in C(T)$, 使 $-1 \leq f_j \leq 1$, 且 $\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) = g(x)$. 由 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow \infty} A_n(f_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x f_j(t) D_n(-t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x g(t) D_n(-t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x |D_n(t)| dt = \|D_n\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

再考虑(6)式, 得 $\|A_n\| = \|D_n\|_{L^1}$.

由(1), (2)两个结论成立, 表明 $\{\|A_n\| \mid n=1, 2, \dots\}$

不是一致有界的, 根据 Banach-Steinhaus 定理, 在 $C(T)$ 内存在稠密的 G_δ 集合 E , 使得

$$\sup\{|A_n f|\} = \infty, \quad \forall f \in E.$$

这说明, E 中的一切函数 f , 使 $A_n f = s_n(f, 0)$ 无上界, 即 $s_n(f, 0)$ 发散. 这一事实表明在单位圆上有足够多的连续函数 f , 使得 $s_n(f, 0)$ 不收敛于 $f(0)$.

我们选取 $x=0$ 是为了方便, 显然对任意 x , 以上结论是成立的. 即对每个实数 x , 在 $C(T)$ 中存在一个稠密的 G_δ 集 E_x , 对于每个 $f \in E_x$, 它的 Fourier 级数在 x 点是发散的. 这就是说我们提出的问题, 其答案是否定的.

§ 2.6 开映射定理

定理 7 设 X, Y 是 Banach 空间, U, V 分别为 X, Y 空间的开单位球, A 为 X 到 Y 的有界线性变换且为映上的, 则对于每一个 A , 相应地存在一个 $\delta > 0$, 使得

$$A(U) \supset \delta V.$$

其中 $\delta V = \{\delta y \mid y \in V\} = \{z \in V \mid \|z\| < \delta\}$.

即对于每个 $y \in Y$, $\|y\| < \delta$, 必有 $x \in X$, $\|x\| < 1$, 且 $Ax = y$.

证 因为 $A: X \rightarrow Y$ 是映上的, 故任给 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使 $Ax = y$. 取 $k > \|x\|$, 则 $x \in kU$, 故 $y = Ax \in A(kU)$. 所以 $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(kU)$.

又 Y 是完备的, 则至少存在一个 k , $A(kU)$ 不是无处稠密的.

否则对一切 k , $A(kU)$ 都是无处稠密的, 则 $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(kU)$ 是第一

纲的, 与 Y 是完备的相矛盾. 故存在一个非空开集 W 含于某个 $A(kU)$ 闭包内: $\overline{A(kU)} \supset W$.

因为 W 是开集合, 所以存在 $y_0 \in Y$, $\eta > 0$ 使得 $\overline{S}(y_0, \eta) \subset$

W. 即存在 k, y_0, η , 使得 $A(kU) \supset S(y_0, \eta)$, 也就是说, 存在 $x_0' \in X$, $\|x_0'\| < k$ 且 $Ax_0' \rightarrow y_0$.

若 $\|y\| < \eta$, 则 $y_0 + y \in S(y_0, \eta)$, 由以上讨论知, 存在 $x_1' \in X$, $\|x_1'\| < k$, 且 $Ax_1' \rightarrow y + y_0$.

令 $x_1 = x_1' - x_0'$, 则 $\|x_1\| \leq \|x_1'\| + \|x_0'\| < 2k$, 且 $Ax_1 = Ax_1' - Ax_0' \rightarrow y$.

以上事实表明, 存在着正整数 k 及 $\eta > 0$, 使对任意 $y \in Y$ 满足 $\|y\| < \eta$, 及任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $x \in X$, 满足 $\|x\| < 2k$ 且 $\|y - Ax\| < \varepsilon$.

对任意 $y \in Y$, $y \neq 0$, 令 $z = \frac{\eta}{\|y\|} y$, 则 $\|z\| < \eta$,

取 $\varepsilon' = \frac{\eta}{\|y\|} \varepsilon$, 则存在 $w \in X$ 满足 $\|w\| < 2k$ 且 $\|z - Aw\| < \varepsilon'$,

令 $x = \frac{\|y\|}{\eta} w$, 则 $\|x\| < \frac{2k}{\eta} \|y\|$, 且 $\|y - Ax\| < \varepsilon$.

归纳以上结果, 我们得到: 对每个 $y \in Y$, $y \neq 0$ 和每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $x \in X$, 使得

$$\|x\| < \theta^{-1} \|y\| \quad \text{及} \quad \|y - Ax\| < \varepsilon,$$

其中 $\theta = \frac{\eta}{2k}$.

取定 $y \in \theta V$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \theta$, 则有 $x_1 \in X$, 使得

$$\|x_1\| < \theta^{-1} \|y\| < 1 \quad \text{及} \quad \|y - Ax_1\| < \frac{1}{2} \theta.$$

又 $y - Ax_1 \in Y$, 再取 $\varepsilon = \frac{1}{2^2} \theta$, 则存在 $x_2 \in X$, 使得

$$\|x_2\| < \theta^{-1} \|y - Ax_1\| < \frac{1}{2} \quad \text{及} \quad \|y - Ax_1 - Ax_2\| < \frac{1}{2^2} \theta.$$

继续作下去, 若 $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ 已取定且 $\|x_m\| < \frac{1}{2^{m-1}}$ ($m = 1, 2, \dots, n$) 使得 $\|y - Ax_1 - \dots - Ax_n\| < \frac{1}{2^n} \theta$. 则由 $y - Ax_1 - \dots - Ax_n \in Y$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}} \theta$ 则存在 $x_{n+1} \in X$, 使得

$$\|x_{n+1}\| < \theta^{-1} \|y - Ax_1 - \dots - Ax_n\| < \frac{1}{2^n}, \text{ 且 } \|y - Ax_1 - \dots - Ax_{n+1}\| < \frac{1}{2^{n+1}} \theta.$$

令 $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则 $\{S_n\}$ 满足

$$\|S_{m+q} - S_m\| = \|x_{m+1} + \dots + x_{m+q}\| < \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{m+q-1}} \rightarrow 0, \text{ 当 } m, q \rightarrow \infty. \text{ 即 } \{S_n\} \text{ 是 } X \text{ 中的 Cauchy 序列, 由 } X \text{ 的完备性知, 存在 } x \in X \text{ 使 } S_n \rightarrow x. \text{ 又 } x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \text{ 而 } \|S_n\| < 1 +$$

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2. \text{ 所以 } \|x\| \leq 2. \text{ 又由于 } A \text{ 是连续的 } AS_n \rightarrow$$

$$Ax. \text{ 又 } \|y - AS_n\| < \frac{1}{2^{n+1}} \theta. \text{ 故 } AS_n \rightarrow y. \text{ 所以}$$

$$y = Ax.$$

即任给 $y \in \theta V$, 则存在 $x \in X$ 满足 $\|x\| \leq 2$, 且 $Ax = y$.

所以 $A(3U) \supset \theta V$. 即 $A(U) \supset \frac{\theta}{3} V$. 故 $\delta = \frac{\theta}{3}$. 定理得证.

定理 8 若 X, Y 是 Banach 空间, A 是 X 到 Y 的有界线性变换且为映上的和一一的, 则存在 $\delta > 0$, 使

$$\|Ax\| \geq \delta \|x\|, \quad \forall x \in X$$

也就是说, A^{-1} 是 Y 到 X 的有界线性变换且为映上的.

证 由开映射定理及 A 是一一的知, $\|Ax\| < \delta$ 蕴涵着 $\|x\| < 1$, 这是因为 $A(U) \supset \delta V$, 且只有一个 x 与 δV 中的 y 相对应. 所以若 $\|x\| \geq 1$ 则 $\|Ax\| \geq \delta$.

任给 $x \in X$, 则 $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ 所以 $\left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq \delta$. 即

$$\|Ax\| \geq \delta \|x\|.$$

变换 A^{-1} 在 Y 上可以这样定义: 若 $y = Ax$ 时, 则 $A^{-1}y = x$, 容易验证 A^{-1} 是线性的. 又由 $\|Ax\| \geq \delta \|x\|$, 得 $\|y\| \geq \delta \|A^{-1}y\|$, 即 $\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\delta} \|y\|$. 所以 $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta}$. 定理得证.

下面利用以上定理讨论 L^1 函数和它的 Fourier 系数的关系. 设空间 $T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$, 考虑 $L^1(T)$ 中的函数 f . 其 Fourier 系数为

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

f 的 L^1 范数取为 $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$.

由 Riemann-Lebesgue 引理知, 对于 $f \in L^1(T)$, 当 $n \rightarrow \pm \infty$ 时, $\hat{f}(n) \rightarrow 0$. 现在提出相反的问题: 若 $\{\varphi(n)\}$ 是一个复数序列, 当 $n \rightarrow \pm \infty$ 时 $\varphi(n) \rightarrow 0$, 那么是否有 $f \in L^1(T)$, 其 Fourier 系数 $\hat{f} = \varphi$, 也就是说满足以上条件的 φ 是否都可以作为 Fourier 系数.

借助于开映射定理可以证明答案是否定的. 令

$$C_0 = \{\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(n) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \pm \infty\},$$

在 C_0 中定义范数

$$\|\varphi\|_0 = \sup\{|\varphi(n)| : n \in \mathbb{Z}\},$$

则 C_0 是一个 Banach 空间. 事实上, 将整数 \mathbb{Z} 看成拓扑空间, 则按以上范数收敛必为一致收敛. 故若 $\varphi_i(n) \rightarrow \varphi(n)$, 则由 $n \rightarrow \pm \infty$ 时

$\varphi_n(n) \rightarrow 0$, 必有当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\varphi(n) \rightarrow 0$, 即得 C_0 的完备性.

定义 $L^1(T)$ 到 C_0 的算子 A ; 即 A 为 $f \rightarrow \hat{f}$ 的映射. 容易验证 A 为线性的. 又

$$\|\hat{f}\|_{\infty} = \sup \{ |\hat{f}(n)| : n \in \mathbb{Z} \}$$

而
$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |e^{-int}| dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt = \|f\|_1,$$

所以

$$\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1.$$

即 A 是有界线性算子, $\|A\| \leq 1$.

再证明 A 是一一的, 即 $\hat{f} = 0$ 蕴涵着 $f = 0$. 若 $\hat{f}(n) =$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = 0$ 对一切 $n \in \mathbb{Z}$ 成立, 则对于一切三角多项式 $g(t)$ 有

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt = 0.$$

又由 Weierstrass 一致逼近定理知, 对于区间 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数 $z(t)$, 满足 $z(-\pi) = z(\pi)$, 一定可以找到一个三角多项式在该区间上一致地逼近 $z(t)$, 所以对于连续函数 $z(t)$ 有 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) z(t) dt = 0$, 由此推知 $f(t) = 0$ a. e. 因否则若在一个测度大于 0 的集合 E 上 $f(t) \neq 0$, 不妨设 $f(t) > 0$. 则可作一连续函数 $g(t)$: 当 $x \in E$, $g(t) > 0$, 当 $x \notin E$, $g(t) = 0$, 于是 $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt > 0$, 与前面结论矛盾. 故 $f(t) = 0$. 即 A 是 $L^1(T)$ 到 C_0 的一一对应的映射.

现在的问题是 A 是否是映上的, 即 A 是否是 $L^1(T)$ 到 C_0 上的一

一有界线性变换。

若 A 是 $L^1(T)$ 到 C_0 上的一一有界线性变换, 由定理 8 知 A^{-1} 是有界的, 即存在 $c > 0$ 使

$$\|f\|_1 \leq c \|\hat{f}\|_\infty, \quad \forall f \in L^1(T).$$

但这是不可能的。因为由 § 2.5 知

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \in L^1(T),$$

而当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\|D_n\|_1 \rightarrow \infty$ 。又

$$|\hat{D}_n(l)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) e^{-ilt} dt \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt} dt \right|$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{当 } l > n; \\ 1 & \text{当 } l \leq n. \end{cases}$$

所以

$$\|\hat{D}_n\|_\infty = \sup_l \{ |\hat{D}_n(l)| : l \in \mathbb{Z} \} = 1.$$

故 $\|D_n\|_1 \leq c \|\hat{D}_n\|_\infty$ 是不可能的。因此 A 不是一一的, 即存在 $\varphi \in C_0$, 对于任意的 $f \in L^1(T)$, $\varphi \neq \hat{f}$ 。

第三章 Banach代数

在复数域上的向量空间 A 中引入满足结合律和分配律的乘法运算, A 就构成一个复代数. 若在 A 中再定义范数使 A 成为一个赋范线性空间且范数满足 $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$, 则 A 成为一个赋范线性代数, 若 A 又是完备的, 就称 A 为Banach代数.

本章介绍Banach代数的基本理论, 它包含了代数性质和拓扑性质之间的相互关系. 谱理论揭示了Banach代数和解析函数之间的密切关系. 同时还将着重介绍可交换的Banach代数的Gelfand表示理论.

§ 3.1 基本概念

定义1 在Banach空间 A 上定义乘法, 满足结合律和分配律, 即

$$(xy)z = x(yz),$$

$$x(y+z) = xy + xz, (y+z)x = yx + zx,$$

对 $x, y, z \in A$ 成立, 并且与数 $\alpha \in \mathbb{C}$ 的乘法满足

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y), \quad \forall x, y \in A.$$

同时乘积的范数满足

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in A,$$

则称 A 为一个Banach代数.

若 $x, y \in A$ 有 $xy = yx$, 则称 A 为可交换的Banach代数, 若存在着一个元素 e , 使得

$$xe = ex = x$$

对 $x \in A$ 成立, 则称 e 为 A 的单位元素, 简称单元.

容易看出, 若 A 有单位元素则必是唯一的. 这是因为若 e' 是另一个单位元素, 则 $e' = e' e = e$. 同时 A 的单位元素的范数不小于一, 事实上 $\|e\| = \|e^2\| \leq \|e\| \|e\|$. 所以 $\|e\| \geq 1$.

下面给出几个Banach代数的例子.

例1 复数域 \mathbb{C} , 若以其元素的模为范数

$$\|a\| = \|x+iy\| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2},$$

则 \mathbb{C} 构成一个具有单位元素的可交换的Banach代数.

另外, 若取四倍的模作为范数

$$\|a\| = \|x+iy\| = 4|x+iy|$$

则 \mathbb{C} 仍为一个有单位元素的可交换的Banach代数. 因为 $4|a\beta| \leq 4|a| \cdot 4|\beta|$, 故 $\|a\beta\| \leq \|a\| \|\beta\|$ 仍成立.

显然, 以上模的倍数必须不小于1, 否则 $\|e\| \geq 1$ 将不能满足.

例2 若 X 是一个拓扑空间, $C(X)$ 是定义在 X 上的有界连续函数组成的线性空间, 取范数为

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in X\}$$

则知 $C(X)$ 为一个Banach空间, 若定义乘法

$$(fg)(x) = f(x)g(x), f, g \in C(X), x \in X$$

则 $C(X)$ 是一个Banach代数. 它是可交换的, 且具有单位元素 $1(x) = 1$.

例3 设 X 是一个局部紧空间, 若 $f \in C(X)$ 满足: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个紧集 $K \subset X$, 使得 $|f(x)| < \varepsilon$ 对一切 $x \notin K$ 成立, 则我们说“ f 在 ∞ 点为0”.

考虑函数集合

$$C_\infty(X) = \{f \in C(X), f \text{ 在 } \infty \text{ 点为 } 0\},$$

显然 $C_\infty(X)$ 是 $C(X)$ 的一个闭子空间. 若仍用 $C(X)$ 中的乘法定义 $C_\infty(X)$ 中的乘法, 则 $C_\infty(X)$ 就是 $C(X)$ 的一个闭子代数, 它也是可交换的, 但没有单位元素.

若 X 是紧空间, 则 $C_\infty(X) = C(X)$, 所以 $C_\infty(X)$ 有单位元素的充分必要条件为 X 是紧空间.

例 4 具有离散拓扑的整数集上的Banach代数.

若取 $X = \mathbb{Z}$, 具有离散拓扑, 于是 \mathbb{Z} 的每一个子集皆为开集, 对每一点 $n \in \mathbb{Z}$ 来说必有含 n 在内的一个开集, 它就是单点集 $\{n\}$, $\{n\}$ 显然是紧的, 故 \mathbb{Z} 是局部紧的, 考虑函数 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, 则由于 \mathbb{Z} 有离散拓扑, f 必为连续的, 此时 $C(\mathbb{Z})$ 就是 \mathbb{Z} 上的有界函数, 若记 $f(n)$ 为 f_n , 则 $C(\mathbb{Z})$ 就是有界序列 $\dots, f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots$ 组成的空间, 记作 l^∞ , l^∞ 必为可交换的具有单位元素的Banach代数.

记 $C_\infty(\mathbb{Z}) = C_0 = \{\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \psi(n) \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \pm\infty\}$, C_0 也是可交换的Banach代数, 但无单位元素.

还可以考虑空间 l^1 :

$$l^1 = \left\{ f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n| < \infty \right\}.$$

取范数 $\|f\|_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n|$, 则 l^1 为一个Banach空间.

若以卷积定义乘法, 即定义

$$(f * g)(n) = (f * g)_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f_i g_{n-i}.$$

容易验证 l^1 是一个可交换的Banach代数, 具有

$$\text{单位元素 } e(n) = e_n = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$$

例 5 局部紧群上的Banach代数.

若 G 是一个群 (例如乘法群), 同时 G 又是一个拓扑空间, 而且关于群的运算是连续的, 即 $(x, y) \rightarrow xy$ 及 $x \mapsto x^{-1}$ 是连续的, 则称 G 是一个拓扑群 (详细讨论见第六章).

例如 \mathbb{Z} 是一个加法群, 在 \mathbb{Z} 上取离散拓扑, 则 \mathbb{Z} 是局部紧的拓扑

空间, 故称 Z 为局部紧群.

又如实数集 R , 规定通常拓扑, 对于加法也是一个局部紧群.

对于局部紧群, Haar证明了一个重要事实: “在每一个局部紧群 G 上, 存在着左不变或右不变测度”. 即若 $A \in G$, 则存在测度 μ , 具有如下性质:

$$\mu(A) = \mu(xA) \quad (\mu(A) = \mu(Ax)), \quad x \in G$$

(第六章中将证明这一事实).

例如 R 为加法群, 取 $A \in R$, 定义

$$A + x = \{a + x \mid a \in A\},$$

则有 Lebesgue 测度 μ , 使得 $\mu(A) = \mu(A + x)$, 即测度 μ 关于坐标平移是不变的.

Z 的计数测度 μ 关于平移也是不变的.

R 是局部紧群, 在 R 上定义 $L^1(R)$:

$$L^1(R) = \{f: R \rightarrow C \mid \int_R |f| dx < \infty\}.$$

取范数
$$\|f\|_1 = \int_R |f| dx,$$

并以卷积定义乘法:

$$(f * g)(x) = \int_R f(y)g(x-y)dy.$$

则 $L^1(R)$ 是一个 Banach 代数.

在任意局部紧群 G 上也可以定义 $L^1(G)$:

$$L^1(G) = \{f: G \rightarrow C \mid \int_G |f| d\mu < \infty\},$$

并在 $L^1(G)$ 上定义乘法为卷积:

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y),$$

则 $L^1(G)$ 是一个 Banach 代数.

例 6 一个不可交换的 Banach 代数.

设 X 是维数大于 1 的 Banach 空间, 则 $X \rightarrow X$ 的全体有界线性算子组成的一个 Banach 代数是不可交换的.

例如考虑一个二维复向量空间 $X\{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\}$. 则 $X \rightarrow X$ 的线性变换对应一个矩阵. 用通常的加法和数乘定义线性变换的相加和数乘运算. 若 $T: X \rightarrow X$, $S: X \rightarrow X$ 为二线性变换, 定义 ST 为二变换的复合 $S \circ T$, 则 $S \circ T$ 对应的矩阵为 S 和 T 所对应的二矩阵之积, 故为不可交换的; 但恒等变换为其单位元素.

由 Banach 代数定义中范数的性质 $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ 知, 乘法运算为连续的. 即若 $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, 则 $x_n y_n \rightarrow xy$. 这由关系式

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &\leq \|x_n y_n - x_n y\| + \|x_n y - xy\| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \end{aligned}$$

可立即得到.

若 e 为 Banach 代数的单位元素, 显然有 $\|e\| \geq 1$, 又由例 1 看出 $\|e\|$ 可能大于 1, 可以证明, 一定有拓扑等价的范数, 使单位元素 e 的范数等于 1.

设 e 为 Banach 代数 A 的单位元素, $\|e\| = c \geq 1$, 今定义另一个范数, 记作 $\|x\|$.

$$\|x\| = \sup\{\|xy\| \mid \|y\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|xy\|}{\|y\|} \mid y \neq 0\right\}$$

容易验证 $\|x\|$ 为范数.

下面证明 $\|x\|$ 和 $\|x\|$ 是等价的. 因为, 当 $\|y\| = 1$ 时 $\|xy\| \leq \|x\| \|y\| = \|x\|$, 所以

$$\|x\| = \sup\{\|xy\| \mid \|y\| = 1\} \leq \|x\|.$$

另外 $\|x \cdot \frac{e}{c}\| = \|\frac{x}{c}\| = \frac{1}{c} \|x\|$, 取 $y = \frac{e}{c}$ 时, 则

$$\|y\| = 1, \text{ 得 } \|x\| \geq \|x \cdot \frac{e}{c}\| = \frac{1}{c} \|x\|.$$

于是有 $\frac{1}{c} \|x\| \leq \|x\| \leq \|x\|$, 或 $\|x\| \leq \|x\| \leq$

$c\|x\|$. 所以 $\|x\|$ 和 $\|x\|$ 等价. 此时

$$\|e\| = \sup\{\|ey\| \mid \|y\| = 1\} = \sup\{\|y\| \mid \|y\| = 1\} = 1.$$

容易验证 A 关于范数 $\|\cdot\|$ 仍为一个 Banach 代数.

假设 A 是没有单位元素的 Banach 代数, 我们可以将 A 扩大, 使之成为一个具有单位元素的 Banach 代数.

$$\text{令 } A_0 = \{(x, \alpha) \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\},$$

定义加法、数乘、乘法运算及范数如下.

$$(x, \alpha) + (y, \beta) = (x + y, \alpha + \beta);$$

$$\beta(x, \alpha) = (\beta x, \beta \alpha);$$

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \beta x + \alpha y, \alpha \beta);$$

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|;$$

其中 $x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

容易验证 (留给读者) A_0 是一个 Banach 代数, 其单位元素为 $(0, 1)$, 即 $e = (0, 1)$ 且 $\|e\| = 1$.

每个 $x \in A$, 可以想象成 A_0 中的元素 $(x, 0)$, 即

$$x \longmapsto (x, 0),$$

这个对应将 A 对应 A_0 , 是一一的, 保持所有的代数运算, 保持范数, 将 A 嵌入 A_0 . A 是 A_0 的一个闭子代数.

再来考虑 Banach 代数 A 上的线性泛函. 由于在 A 上定义了乘法, 若 φ 为 A 上的泛函, 满足 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ 对一切 $x, y \in A$ 成立, 则称 φ 保持乘法运算, 如果 φ 为 A 上的线性泛函且保持乘法运算, 则称 φ 是 A 到复数域 \mathbb{C} 的代数同态, 简称为 Banach 代数 A 上的复同态.

定理 1 若 A 是 Banach 代数, φ 是 A 到复数域 \mathbb{C} 的代数同态, 则作为线性泛函, $\|\varphi\| \leq 1$.

证 用反证法, 若 $\|\varphi\| > 1$, 则由 $\|\varphi\|$ 的定义知, 必有某个

$x_0 \in A$, 使 $\|x_0\| = 1$ 且 $|\varphi(x_0)| > 1$.

令 $x = \frac{x_0}{\varphi(x_0)}$, 则 $\|x\| = \frac{\|x_0\|}{|\varphi(x_0)|} < 1$, 且 $\varphi(x)$

$= 1$. 由于 $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ 且 $\|x\| < 1$, 令

$$s_n = x + x^2 + \cdots + x^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

则 $\{s_n\}$ 为 A 的一个 Cauchy 序列. 又 A 是 Banach 空间, 所以存在 $y \in A$, 使得 $\|s_n - y\| \rightarrow 0$.

由于 $xs_n = s_{n+1} - x$, 从而有 $xy = y - x$, 于是有

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y - x) = \varphi(y) - \varphi(x).$$

因为 $\varphi(x) = 1$, 得 $\varphi(y) = \varphi(y) - 1$, 这是不可能的, 定理得证.

Banach 代数 A 到复数域 \mathbb{C} 的同态是 Banach 代数上最重要的复泛函. 由它的代数性质, 保持乘法且为线性的, 推出它必为有界的, 显示了代数性质和拓扑性质之间的关系.

§ 3.2 谱论

在有单元的 Banach 代数 A 中, 我们要考虑 A 中的元素关于乘法的可逆性, 元素 $x \in A$ 称为可逆的, 如果存在一个元素 $y \in A$ 使得

$$xy = yx = e.$$

y 称为 x 的逆元, 记作 x^{-1} . 每一个 $x \in A$ 至多只能有一个逆元. 因为若 y, z 都是 x 的逆元, 则

$$xy = yx = e, \quad xz = zx = e,$$

于是 $z = ze = z(xy) = (zx)y = ey = y$.

令 G 是 A 内可逆元的集合:

$$G = \{x \in A \mid x^{-1} \text{ 存在}\}$$

容易看出, 若 $x \in G, y \in G$, 则 $x^{-1} \in G, xy \in G$, 这是因为 $(x^{-1})^{-1} = x, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. 所以 G 关于乘法构成一个群.

定义 2 对于元素 $x \in A$, 使 $x - \lambda e$ 不可逆的全体复数 λ 组成的

集合, 称为 x 的谱, 记作 $\sigma(x)$. 即 $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid x - \lambda e \notin G\}$.

定理 2 若 $x \in A$, $\|x\| < 1$, 则 $e - x \in G$. 且

$$(e - x)^{-1} = e + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (1)$$

证 记 $s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n$. 因为 $\|x\| < 1$, $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, 得知 $\{s_n\}$ 是 A 中的 Cauchy 序列, 故 (1) 式中级数收敛于

一个元素 $y \in A$. 即 $s_n \rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. 又

$$(e - x)s_n = e - x^{n+1} = s_n(e - x) \rightarrow e,$$

$$(e - x)s_n \rightarrow (e - x)y, \quad s_n(e - x) \rightarrow y(e - x),$$

所以 $(e - x)y = y(e - x) = e$.

这个定理说明, 以 e 为中心 1 为半径的开球内的所有元素都是可逆的.

定理 3 若 $a \in G$, $\|x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, 则 $a - x \in G$.

证 由 $a - x = a(e - a^{-1}x)$, $\|a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\| \|x\| < 1$. 由定理 2 知 $e - a^{-1}x$ 可逆, 而 a 可逆, 所以 $a(e - a^{-1}x)$ 可逆, 即 $a - x \in G$.

定理说明, 对于 G 中的任意点 a , 以 a 为中心, 以 $\frac{1}{\|a^{-1}\|}$ 为半径的开球内的点也都在 G 中, 由此得出以下结论.

推论 1 G 是开集, $A \setminus G$ 是闭集.

定理 4 映射 $x \rightarrow x^{-1}$ 是 G 到 G 上的同胚.

证 首先证明 $x \rightarrow x^{-1}$ 是连续映射, 令 $a \in G$, $\|x\| <$

$$\frac{1}{2\|a^{-1}\|}.$$

$$\|(a - x)^{-1} - a^{-1}\| = \|(e - a^{-1}x)^{-1}a^{-1} - a^{-1}\|$$

$$\begin{aligned}
&= \| (a^{-1}x + (a^{-1}x)^2 + \dots) a^{-1} \| \\
&\leq (\|a^{-1}x\| + \|a^{-1}x\|^2 + \dots) \|a^{-1}\| \\
&\leq \|a^{-1}\|^2 \|x\| + \|a^{-1}\|^3 \|x\|^2 + \dots \\
&\quad + \|a^{-1}\|^4 \|x\|^3 + \dots \\
&= \frac{\|a^{-1}\|^2 \|x\|}{1 - \|a^{-1}\| \|x\|} < 2 \|a^{-1}\|^2 \|x\|.
\end{aligned}$$

(公比为 $\|a^{-1}\| \|x\| < \frac{1}{2}$ 的几何级数)

当 $\|x\|$ 充分小, 则 $2 \|a^{-1}\|^2 \|x\|$ 可以任意小, 所以 $x \rightarrow x^{-1}$ 是连续的.

又显然 $x \rightarrow x^{-1}$ 是映上的, 而且由于 $(x^{-1})^{-1} = x$, 故逆映射就是它自己, 所以 $x \rightarrow x^{-1}$ 是 G 到 G 上的同胚.

定理 5 对于每个 $x \in A$, 谱 $\sigma(x)$ 是紧集, 且当 $\lambda \in \sigma(x)$ 时 $|\lambda| \leq \|x\|$.

证 若 $|\lambda| > \|x\|$, 则 $\frac{\|x\|}{|\lambda|} < 1$, 所以 $e - \frac{x}{\lambda} \in G$, 即 $\lambda e - x \in G$, 因此 $\lambda \notin \sigma(x)$, 故若 $\lambda \in \sigma(x)$ 则 $|\lambda| \leq \|x\|$, 也就是 $\sigma(x)$ 为有界集.

再证明 $\sigma(x)$ 是闭集, 设 $\lambda_n \in \sigma(x)$ 且 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 则 $x - \lambda_n e \rightarrow x - \lambda e$. 因为 $x - \lambda_n e \in A \setminus G$, 而 $A \setminus G$ 是闭集, 所以 $x - \lambda e \in A \setminus G$, 即 $\lambda \in \sigma(x)$. $\sigma(x)$ 是闭的.

综上所述, $\sigma(x)$ 是 \mathbf{C} 中的有界闭集, 故 $\sigma(x)$ 为紧集.

定理 6 设 ϕ 为 Banach 代数 A 上的有界线性泛函, 固定 $x \in A$, 定义

$$f(\lambda) = \phi[(x - \lambda e)^{-1}], \quad \lambda \notin \sigma(x)$$

则 $f(\lambda)$ 在 $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$ 上解析, 且当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $f(\lambda) \rightarrow 0$.

证 取定 $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$, 证明 $\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda}$ 当 $\mu \rightarrow \lambda$ 时极限存在.

因 $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$ 为开集, 故当 μ 充分接近 λ 时, $\mu \in \mathbf{C} \setminus \sigma(x)$.

$$(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} = (x - \mu e)^{-1} \{ (x - \lambda e) - (x - \mu e) \} (x - \lambda e)^{-1},$$

$$\frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\mu - \lambda} = (x - \mu e)^{-1} (x - \lambda e)^{-1} \rightarrow (x - \lambda e)^{-2},$$

当 $\mu \rightarrow \lambda$.

由于 ϕ 是线性泛函且为连续的, 所以当 $\mu \rightarrow \lambda$ 时

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = \phi \left[\frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\mu - \lambda} \right] \rightarrow \phi(x - \lambda e)^{-2}.$$

这说明 f 在 λ 点是可微的, 从而 $f(\lambda)$ 在 $\mathbf{C} \setminus \sigma(x)$ 内是解析的.

由定理 5 知 $f(\lambda)$ 在以 0 点为中心 $\|x\|$ 为半径的圆外是有意义的, 故可以考虑 $\lambda \rightarrow \infty$ 的情况. 由 G 中逆映射的连续性, 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 有

$$\lambda f(\lambda) = \phi[\lambda(x - \lambda e)^{-1}] = \phi[(\lambda^{-1}x - e)^{-1}] \rightarrow \phi(-e)$$

所以当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $f(\lambda) \rightarrow 0$.

定理 7 对每个 $x \in A$, $\sigma(x)$ 是 \mathbf{C} 的非空紧子集.

证 定理 5 中已经证明了 $\sigma(x)$ 是紧集, 现只需证明 $\sigma(x)$ 非空. 固定 $x \in A$, 若 $\sigma(x)$ 为空集, 则对一切 $\phi \in A^*$, $f(\lambda) = \phi[(x - \lambda e)^{-1}]$ 在 \mathbf{C} 上解析, 即 $f(\lambda)$ 为整函数, 且由 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $f(\lambda) \rightarrow 0$ 知 $f(\lambda)$ 是有界的, 根据 Liouville 定理知 $f(\lambda) \equiv 0$.

又取定 $\lambda = 0$, x 可逆故 $x^{-1} \neq 0$, 由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $\phi_1 \in A^*$, 使得 $\phi_1(x^{-1}) = \|x^{-1}\| \neq 0$, 即 $f(0) = \phi_1(x^{-1}) \neq 0$, 矛盾. 定理得证.

定理 8 (Gelfand-Mazur 定理) 若具有单位元素的 Banach 代数 A 中的每个非零元素都是可逆的, 则 A 就是复数域, 即若 $G = A \setminus \{0\}$, 则 $A = \mathbf{C}e$, ($\mathbf{C}e = \{\lambda e \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$).

证 由假设知, 对于一切 $x \in A$, 只要 $x - \lambda e \neq 0$ 则 $x - \lambda e$ 可逆, 即 $\lambda \notin \sigma(x)$, 换言之, 若 $\lambda \in \sigma(x)$, 则 $x - \lambda e = 0$, 即 $x = \lambda e$, 所以 $\sigma(x)$ 至多只能包含一个数. 因为若 $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(x)$, 则由 $x = \lambda_1 e$ 及

$x = \lambda_2 e$ 知 $\lambda_1 = \lambda_2$. 又由定理 7 知 $\sigma(x)$ 非空, 故 $\sigma(x)$ 刚好由一点组成, 记为 λ_x , 则 $x = \lambda_x e$, 因此 $x \rightarrow \lambda_x$ 是 A 到复数域上的同构, 且 $\|x\| = \|\lambda_x e\| = |\lambda_x|$, 所以也是等距的, 因此 $A = Ce$.

定理说明, 这个代数 A 是最简单的代数, 且顺便得到了 A 是可交换的. 在后面考虑可交换的 Banach 代数时, 可以看到这个定理的重要性.

定义 3 A 是具有单位元素的 Banach 代数, $x \in A$, 记

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\},$$

$\rho(x)$ 称为 x 的谱半径.

定理 9 (谱半径公式) 对于每个 $x \in A$,

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

证 (1) 首先证明 $\rho(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

固定 $x \in A$, 若 $\lambda \in \sigma(x)$, 则必有 $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, 因为若 $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$, 则 $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$ 存在. 但

$$\begin{aligned} x^n - \lambda^n e &= (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2}x + \lambda^{n-1}e) \\ &= (x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2}x + \lambda^{n-1}e)(x - \lambda e), \end{aligned}$$

右乘 $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$, 得

$$e = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2}x + \lambda^{n-1}e)(x^n - \lambda^n e)^{-1}.$$

左乘 $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$, 得

$$e = (x^n - \lambda^n e)^{-1}(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-2}x + \lambda^{n-1}e)(x - \lambda e).$$

由以上二式知 $(x - \lambda e)^{-1}$ 是存在的, 故 $\lambda \notin \sigma(x)$. 所以若 $\lambda \in \sigma(x)$ 则 $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

又由定理 5 知 $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$, 所以 $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. 这就给出

$$\rho(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(2) 其次再证明 $\rho(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$.

因为 $(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1}$,

而当 $\|\lambda^{-1}x\| < 1$, 即 $|\lambda| > \|x\|$ 时,

$$(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}x)^n.$$

即
$$(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}x)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n,$$

$|\lambda| > \|x\|.$

于是
$$f(\lambda) = \Phi((x - \lambda e)^{-1}) = - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n) \lambda^{-n-1},$$

$\Phi \in A^*, |\lambda| > \|x\|.$

由定理 6 知 $f(\lambda)$ 在 $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ 内是解析的. 特别地, $f(\lambda)$ 在域 $\{\lambda \mid |\lambda| > \rho(x)\}$ 内是解析的. 于是得出级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x^n) \lambda^{-n-1} = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(\lambda^{-n} x^n)$ 在域 $\{\lambda \mid |\lambda| > \rho(x)\}$ 内收敛. 故对任意 $\Phi \in A^*$, 有

$$\sup_n |\Phi(\lambda^{-n} x^n)| < \infty, \quad |\lambda| > \rho(x). \quad (2)$$

由第二章推论 2 知, 对于任意的 $x \in A$, 映射 $\Phi \rightarrow \Phi(x)$ 是 A^* 上的有界线性泛函, 其范数为

$$\|x\| = \sup\{|\Phi(x)| \mid \Phi \in A^*, \|\Phi\| = 1\}.$$

所以 $\lambda^{-1}x, \lambda^{-2}x^2, \dots, \lambda^{-n}x^n, \dots$ 是定义在 A^* 上的一族有界线性泛函, 且对每个 Φ , (2) 式成立. 由 Banach-Steinhaus 定理知, 对每一个使 $|\lambda| > \rho(x)$ 的 λ , 存在一个实数 $c(\lambda)$, 使得

$$\|\lambda^{-n}x^n\| \leq c(\lambda), \quad n=1, 2, \dots,$$

即对一切 n 有

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| [c(\lambda)]^{\frac{1}{n}}, \quad |\lambda| > \rho(x).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda| [c(\lambda)]^{\frac{1}{n}} = |\lambda|,$$

对于一切满足 $|\lambda| > \rho(x)$ 的 λ 是成立的。所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x).$$

由(1)、(2)得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(x). \quad \text{定理得证.}$$

定理说明了以下几个事实:

(1) $\rho(x)$ 的定义仅用了元素 x 的代数性质, 即根据 $x - \lambda e$ 是否有逆元素来确定 $\rho(x)$ 。但定理却给出了 $\rho(x)$ 和 x^n 的范数有关, 也就是 $\rho(x)$ 依赖于 A 的拓扑性质。

(2) $\rho(x)$ 与范数 $\|x\|$ 是如何定义的无关, 只要 A 按范数 $\|x\|$ 构成 Banach 代数, 则谱半径公式恒成立, 且 $\rho(x)$ 只和 x^n ($n=1, 2, \dots$) 有关, 而与整个 A 无关。

(3) 若 Banach 代数 A 是 Banach 代数 B 的闭子代数, 可能出现以下情况: 某个 $x \in A$, $x - \lambda e$ 在 A 中不可逆, 但在 B 中可逆, 令

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \mid (x - \lambda e)^{-1} \text{ 在 } A \text{ 中不存在}\},$$

$$\sigma_B(x) = \{\lambda \mid (x - \lambda e)^{-1} \text{ 在 } B \text{ 中不存在}\},$$

则 $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$ 。但定理 9 却说明 x 的谱半径不受影响, 即 $\rho_A(x) = \rho_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$; 谱半径仅仅用 x 的幂的度量性质给出。

例 设 $B = C(T)$ 是单位圆周 T 上的全体复连续函数。按通常的加法和乘法, 取范数 $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in T\}$, B 为一个 Banach 代数, 并且有单元 $e=1$ 。

令 A 是 $C(T)$ 中具有下列性质的 f 的集合: f 可以开拓为单位圆的闭包 \bar{U} 上的连续函数 F , 且 F 在 U 内解析, 则按 B 中定义加法, 乘法和范数, A 也构成一个 Banach 代数。只需证 A 是闭的。设 $\{f_n\} \in A$, 即每个 f_n 都可以开拓为 F_n , F_n 在 \bar{U} 上连续在 U 内解析, 若 $\{f_n\}$ 为 A 内的 Cauchy 序列, 则 f_n 在 T 上一致收敛, 即

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon, \quad n, m > N,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

由解析函数的最大模原理知: $\|F_n - F_m\| < \varepsilon$, 当 $n, m > N$. 故 $\{F_n\}$ 也是Cauchy序列, 且在 \overline{U} 上一致收敛, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, F 即为 f 在 \overline{U} 上的开拓, 所以 $f \in A$. 这表明 A 是 B 的闭子代数.

考虑 $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ 定义的 f_0 , 则 $F_0(z) = z$. 下面求 $\sigma_A(f_0)$. 因为 $|\lambda| \leq \|f_0\| = 1$, 所以不必考虑 $|\lambda| > 1$ 的情形.

当 $|\lambda| \leq 1$, 考虑 $f_0 - \lambda \cdot 1$ 在 A 中的逆元素 $(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1}$, 若逆元素存在, 则一定可以开拓为 \overline{U} 上连续 U 内解析的函数, 故必能在 U 上展成幂级数, 但当 $|\lambda| \leq 1$ 时, $(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1} = \lambda^{-1}(\frac{f_0}{\lambda} - 1)^{-1}$, 而 $\frac{\|f_0\|}{|\lambda|} \geq 1$, 故不能展成幂级数. 所以 $f_0 - \lambda \cdot 1$ 的逆元素不存在, 因此 $\sigma_A(f_0) = \overline{U}$.

再求 $\sigma_B(f_0)$. 当 $|\lambda| < 1$ 时 $f_0 - \lambda \cdot 1 = e^{i\theta} - \lambda \neq 0$, 所以

$$(f_0 - \lambda \cdot 1)^{-1} = \frac{1}{f_0 - \lambda}.$$

但当 $|\lambda| = 1$ 时 $f_0(\lambda) = \lambda$, 则 $\frac{1}{f_0 - \lambda}$ 不存在, 所以 $\sigma_B(f_0) = T$.

由此看出 $\sigma_A(f_0)$ 比 $\sigma_B(f_0)$ 要大得多, 但 $\rho_A(f_0) = \rho_B(f_0) = 1$.

§ 3.3 Banach代数上的理想与同态

本节研究可交换的Banach代数 A 上的极大理想与 A 上的复同态 φ 的关系, 在第一章中, 已经给出了环上理想与极大理想概念, 所谓Banach代数 A 上的理想 I , 是指 I 是 A 的子集, 且满足

(1) 若 $x, y \in I$, 则 $x + y \in I$;

(2) 若 $x \in I, z \in A$, 则 $xz \in I$.

也就是将 A 看成一个环, 则 I 是环上理想.

若 $I \neq A$, 则称 I 为一个真理想, 若 I 是一个真理想, 且不含于其

它任何真理想, 则称 I 为极大理想. 即若 N 是 A 中的理想, 且 $I \subset N$, 则必有 $N=I$ 或 $N=A$.

理想 I 实际上是个子空间, 因为若 $x \in I, y \in I$, 则 $x+y \in I$; 若 $x \in I, a \in C$, 则 $ax=a(ex)=(ae)x \in I$.

下面我们总以 A 表示具有单元的可交换的Banach代数.

容易看出 A 上的理想 I 具有以下几个性质:

(1) I 是 A 上的理想, 则 \overline{I} 也是 A 上的理想.

(2) 若 I 是 A 上的真理想, 则 $I \cap G = \emptyset$.

因为若 $I \cap G \neq \emptyset$, 则存在 $g \in I \cap G$, 所以 $g^{-1} \in A$ 存在, 于是 $e = gg^{-1} \in I$. 因此 $I=A$, 与 I 是真理想矛盾.

由(1)、(2)知, 若 I 是一个真理想, 则 \overline{I} 也是真理想, 因为若 $I \cap G = \emptyset$, 而 G 为开集, 所以 $\overline{I} \cap G = \emptyset$.

(3) 若 M 是极大理想, 则 M 是闭的.

因为由(1)知, \overline{M} 也是理想. 由(2)知 $\overline{M} \cap G = \emptyset$, 所以 $\overline{M} \neq A$. 又 $M \subset \overline{M} \neq A$, 由极大理想定义知 $M = \overline{M}$, 即 M 是闭的.

(4) 若 I 是 A 的真理想, 则存在极大理想 M , 使得 $M \supset I$.

可利用Zorn引理加以证明, 令

$$\mathcal{M} = \{J \mid J \text{ 是 } A \text{ 上的真理想, } J \supset I\}$$

利用集合的包含关系将 \mathcal{M} 半序化, 今取 $\{J_\alpha\} \in \mathcal{M}$ 是一个链, 则容易验证 $J = \bigcup J_\alpha$ 是包含 I 的真理想且为 $\{J_\alpha\}$ 的上界, 由Zorn引理知 \mathcal{M} 中必有极大元素 M , M 即为包含 I 的极大理想.

若 I 是 A 上的一个闭的真理想, 对于每一个 $x \in A$, 令 \dot{x} 或 $\varphi(x)$ 表示集合 $x+I$:

$$\varphi(x) = \dot{x} = x+I = \{x+y \mid y \in I\},$$

称为 I 的傍集, 显然由定义知, 若 $x_2 - x_1 \in I$, 则 $\dot{x}_2 = \dot{x}_1$, 若 $x_2 - x_1 \notin I$, 则 $\dot{x}_2 \cap \dot{x}_1 = \emptyset$, 令 A/I 表示 I 的所有傍集构成的集合, 在 A/I 中定义加法、数乘、乘法及范数如下:

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \overline{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}, \quad \text{或} \quad (x_1 + I) + (x_2 + I) = x_1 + x_2 + I,$$

$$\alpha \dot{x} = \widehat{\alpha x}, \quad \text{或} \quad \alpha(x+I) = \alpha x + I,$$

$$\dot{x}_1 \cdot \dot{x}_2 = \widehat{x_1 x_2}, \quad \text{或} \quad (x_1+I)(x_2+I) = x_1 x_2 + I.$$

$$\|\dot{x}\| = \|x+I\| = \inf\{\|x+y\| \mid y \in I\}.$$

则 A/I 是一个具有单元的可交换的 Banach 代数.

首先, 上面给出的加法、数乘及乘法运算是完全确定的. 事实上, 若 $z_1 - x_1 \in I$, $z_2 - x_2 \in I$, 则 $z_1 - x_1 + z_2 - x_2 \in I$. 即 $(z_1 + z_2) - (x_1 + x_2) \in I$. 也就是说, 若 $\dot{z}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{z}_2 = \dot{x}_2$, 则

$\widehat{x_1 + x_2} = \widehat{z_1 + z_2}$. 又由 $z_1 = x_1 + y_1$, $y_1 \in I$ 及 $z_2 = x_2 + y_2$, $y_2 \in I$, 知

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + (y_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 y_2),$$

又 $y_1 x_2 + x_1 y_2 + y_1 y_2 \in I$. 故 $\widehat{z_1 z_2} = \widehat{x_1 x_2}$.

再证明 $\|\dot{x}\|$ 满足范数的条件, 由定义 A/I 中的零元素为 $\dot{O} = O + I = I$. A/I 中的单元为 $\dot{e} = e + I$.

(1) $\|\dot{x}\| \geq 0$, 显然成立.

若 $\|\dot{x}\| = 0$, 由 $\|\dot{x}\|$ 的定义知, 存在 $y_n \in I$, 使得 $\|x + y_n\| \rightarrow 0$. 因为 $x + y_n \in A$, 所以 $x + y_n \rightarrow O$, 即 $-y_n \rightarrow x$, 又 I 是闭的, 故 $x \in I$, 即 $\dot{x} = \dot{O}$.

(2) $\|\alpha \dot{x}\| = |\alpha| \|\dot{x}\|$, 显然成立.

(3) 证明 $\|\dot{x}_1 + \dot{x}_2\| \leq \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\|$.

由 $\|\dot{x}_i\|$ 定义知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $y_i \in I$, 使得 $\|x_i + y_i\| < \|\dot{x}_i\| + \varepsilon$, $i=1, 2, \dots$ 又

$$\|\dot{x}_1 + \dot{x}_2\| \leq \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leq \|x_1 + y_1\| + \|x_2\|$$

$$\|x_2 + y_2\| \leq \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\| + 2\varepsilon,$$

所以 $\|\dot{x}_1 + \dot{x}_2\| \leq \|\dot{x}_1\| + \|\dot{x}_2\|.$

(4) 再证 $\|\dot{x}_1 \dot{x}_2\| \leq \|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|.$

与(3)同, $\|\dot{x}_1 \dot{x}_2\| \leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \leq \|x_1 + y_1\| \|x_2 + y_2\| < (\|\dot{x}_1\| + \varepsilon)(\|\dot{x}_2\| + \varepsilon)$
 $= \|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\| + \varepsilon',$

所以 $\|\dot{x}_1 \dot{x}_2\| \leq \|\dot{x}_1\| \|\dot{x}_2\|.$

最后证明 A/I 的完备性.

令 $\{\dot{x}_n\}$ 是 A/I 中的 Cauchy 序列, 则存在着子序列 $\{\dot{x}_{n_i}\}$, 使得

$$\|\dot{x}_{n_{i+1}} - \dot{x}_{n_i}\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \dots.$$

对于一切 i , 由 $\|\dot{x}_{n_{i+1}} - \dot{x}_{n_i}\|$ 的定义知, 存在 $y_i \in I$ 使得

$$\|\dot{x}_{n_{i+1}} - x_{n_i} + y_i\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \dots.$$

令 $z_i = x_{n_i} + y_{i-1} + y_{i-2} + \dots + y_1$, 则

$$\|z_{i+1} - z_i\| = \|x_{n_{i+1}} - x_{n_i} + y_i\| < \frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \dots,$$

所以 $\{z_i\}$ 为 A 中的 Cauchy 序列, 又 A 是完备的, 故 $\{z_i\}$ 收敛. 令 $z_i \rightarrow z$,

又因为 $\|\dot{z}_i - \dot{z}\| \leq \|z_i - z\|$ (取 $y=0 \in I$), 所以 $\dot{z}_i \rightarrow \dot{z}$.

又 $z_i - x_{n_i} = y_{i-1} + y_{i-2} + \dots + y_1 \in I$, 故 $\dot{z}_i = \dot{x}_{n_i}$, 由此可知 $\{\dot{x}_n\}$

有收敛子列 $\{\dot{x}_{n_i}\}$, 且收敛于 \dot{z} , 于是得到 $\{x_n\} \rightarrow \dot{z}$, 即 A/I 是完备的.

由以上论证知, A/I 确为一有单元 \dot{e} 的可交换 Banach 代数,

也称为商代数.

定理10 A/I 是一个域的充分必要条件是 I 是 A 上的极大理想.

证 假设 $x \in A, x \notin I$, 则 $\dot{x} \neq 0$ 且 $\dot{x} \in A/I$, 作

$$J = \{\dot{x} \dot{z} \mid \dot{z} \in A/I\} = \{xz + y \mid z \in A, y \in I\},$$

容易验证 J 是 A 的一个理想, 且 $J \supset I$, 因为 $x \in J$ 而 $x \notin I$, 故 $J \neq I$.

若 I 是极大理想, 则 $J = A$. 因此对某个 $z \in A$ 和 $y \in I$ 有 $xz + y = e$. 即 $xz - e = y \in I$. 所以 $\dot{x} \dot{z} = \dot{e}$. 这就是说, 若 $\dot{x} \neq 0$ 则 \dot{x} 可逆. 由Gelfand-Mazur 定理知 A/I 为一个域.

若 I 不是极大理想, 则与以上一样选择 x 使 $J \neq A$, 即 $e \notin J$, 从而 \dot{x} 在 A/I 中不可逆, 定理得证.

下面研究 A 上的极大理想与 A 到 \mathbf{C} 上的代数同态之间的关系.

令 $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}$ 表示 A 的一切极大理想的集合.

令 $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}$ 是 A 到 \mathbf{C} 上的一切非零代数同态的集合.

取 $M \in \mathcal{M}$, 由定理10知 A/M 是一个域, 且由Gelfand-Mazur定理知 $A/M = \mathbf{C} \dot{e}$, 这也就是说, 当 M 取定, 任给 $x \in A$, 则对应一个复数记作 $\varphi_M(x)$, 使

$$\dot{x} = x + M = \varphi_M(x) \dot{e}, \quad \varphi_M(x) \in \mathbf{C},$$

或 $x - \varphi_M(x)e \in M$.

由 A/M 的定义知, $A \rightarrow A/M$ 即 $x \rightarrow \dot{x}$ 保持所有的代数运算, 即为一代数同态. 又 $A/M \rightarrow \mathbf{C}$, 即 $\dot{x} \rightarrow \varphi_M(x)$ 为一代数同态; 由此可得 $x \rightarrow \varphi_M(x)$ 是 A 到 \mathbf{C} 上的代数同态, 即属于 \mathcal{A} . 也就是说, 任给 $M \in \mathcal{M}$, 都可以找到一个 \mathcal{A} 中的元素 $\varphi_M: x \rightarrow \varphi_M(x)$ 与之相对应. 使 $\varphi_M(x) = 0$ 的一切 x 的集合称为 φ_M 的核, 记作 $\ker \varphi_M$, 显然

$$\ker \varphi_M = \{x \mid \varphi_M(x) = 0\} = M.$$

定理11 若 ψ 是 $A \rightarrow \mathbf{C}$ 的代数同态, 且 $\ker \psi = M$, 则 M 必是 A 的极大理想.

证 设 $x, y \in M$, 即 $\psi(x) = 0, \psi(y) = 0$, 则 $\psi(x+y) =$

$\psi(x) + \psi(y) = 0$. 所以 $x + y \in M$.

若 $x \in M$, $z \in A$, 则 $\psi(xz) = \psi(x) \cdot \psi(z) = 0$. 所以 $xz \in M$.

故 M 是一个理想. 任给一个理想 $N \supset M$ 且 $N \neq M$, 即有 $y \in N$, $y \notin M$, $\psi(y) \neq 0$. 不妨设 $\psi(y) = 1$, 又 $\psi(e) = 1$, 所以 $\psi(e - y) = 0$ 即 $e - y \in M$, 故存在 $m \in M$, 使 $e - y = m$. 又 $y \in N$, $m \in M \subset N$, 从而 $e = y + m \in N$, 于是 $N = A$. 所以 M 是极大理想. 定理得证.

又由于 $\psi(x - \psi(x)e) = \psi(x) - \psi(e)\psi(x) = \psi(x) - \psi(x) = 0$, 得 $x - \psi(x)e \in M$.

这个定理说明, 任给 $\psi \in \mathcal{A}$, 则得到 $\ker \psi = M \in \mathcal{M}$. 而且对一切 $x \in A$, 有 $x - \psi(x)e \in M$. 所以 ψ 即为 φ_M .

综上所述, 给定 $M \in \mathcal{M}$, 可以有 $\varphi_M \in \mathcal{A}$ 与之相对应, 使 $\ker \varphi_M = M$, $x - \varphi_M(x)e \in M$. 反之, 给定一个 $\psi \in \mathcal{A}$, 则 $\ker \psi = M \in \mathcal{M}$, 且 $x - \psi(x)e \in M$. 这样就确定了极大理想集合 \mathcal{M} 和代数同态集合 \mathcal{A} 上的一一对应. 又由于极大理想一定存在, 故一定有 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的代数同态. 若在代数同态集合上再定义拓扑, 则可构成一个拓扑空间. 下面在讨论 Gelfand 表示理论时, 将在 \mathcal{A} (或 \mathcal{M}) 上引入拓扑.

§ 3.4 弱拓扑与弱·拓扑

设 X_α 是拓扑空间, 其中 α 是某个指标集合 K 中的元素. 考虑笛卡尔乘积

$$X = \prod_{\alpha \in K} X_\alpha,$$

这是指 $x \in X$ 可看成广义序列

$$x = (x_\alpha | \alpha \in K), \text{ 其中 } x_\alpha \in X_\alpha.$$

X 上的乘积拓扑是指有一个由以下形式的集合组成的基:

$$\bigcap_{\alpha \in B} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

其中 U_α 是 X_α 中的开集, $B \subset K$ 且 B 为有限集, P_α 是 X 到 X_α 的投影.

即 $P_\alpha: X \rightarrow X_\alpha, x \rightarrow x_\alpha$, 其中 $x = (x_\alpha)$. X 中的开集定义为基中任意多个集的并集. 按以上定义的拓扑 x' 趋近于 x , 即 $x' \rightarrow x$ 是指每一个坐标都有 $x'_\alpha \rightarrow x_\alpha, \alpha \in K$.

在点集拓扑中有以下著名定理.

定理12 (Tychonoff定理) 一族紧拓扑空间 $X_\alpha (\alpha \in K)$ 的笛卡尔乘积 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ 也是紧的. (证明从略)

Banach 空间的范数拓扑通常称为强拓扑, Cauchy 叙列 $\{x_n\}$ 称为是强收敛的, 其极限也称为强极限. 下面介绍弱拓扑和弱*拓扑的概念.

设 A 是赋范线性空间, A^* 是 A 的共轭空间, A^{**} 是 A^* 的共轭空间. 由第二章推论知, 对于固定的 $x \in A$, 映射 $\varphi \rightarrow \varphi(x), (\varphi \in A^*)$ 是 A^* 上一个范数为 $\|x\|$ 的有界线性泛函. 即当 $x \in A$, 令

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x),$$

其中 $\varphi \in A^*$, 则 $\hat{x} \in A^{**}$ 且 $\|\hat{x}\| = \|x\|$, 由此知 $A \subset A^{**}$.

任给 $x \in A$, 考虑 $\{\varphi(x) | \varphi \in A^*\}$, 由 Hahn-Banach 定理知, 当 $x \neq y$ 则 $\{\varphi(x)\} \neq \{\varphi(y)\}$. 即对于不同的 x , 广义序列 $\{\varphi(x)\}$ 不同. 这样可以将 x 和它在 φ 上的广义坐标 $\varphi(x) = x_\varphi$ 相对应, 即 x 完全被广义序列 $\{x_\varphi\}$ 所决定. 也就是说若 $x \in A$, 则

$$x \in \prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi, \quad (X_\varphi = \mathbb{C}).$$

于是 A 中每一点 x 都可以看作乘积空间 $\prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi$ 中的点. 反之, 若

$t \in \prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi$, 只有当 t 满足

$$t_{\phi+\psi} = t_\phi + t_\psi, \quad t_{\alpha\varphi} = \alpha t_\varphi$$

时, 可以有 $t \in A$. 所以 A 是乘积空间 $\prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi$ 的子集, 将乘积空间

$\prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi$ 的拓扑作为 A 的拓扑, 则 A 成为 $\prod_{\varphi \in A^*} X_\varphi$ 的子空间. 这种拓

扑称为 A 的弱拓扑.

A 的弱拓扑是指包含着如下形式的集合构成的基的拓扑

$$U(x_0; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varepsilon) = \{x \in A \mid |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon, \\ i = 1, 2, \dots, n\}, \text{ 其中 } x_0 \in A, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in A^*, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0.$$

由以上引入的拓扑看出, A 的弱拓扑是指使一切 $\varphi \in A^*$ 都连续的拓扑. 在 A 原来的度量拓扑下, 所有 $\varphi \in A^*$ 都是连续的. 故以上引入的拓扑较 A 的度量拓扑要弱, 故称为弱拓扑.

下面考虑 A 的共轭空间 A^* 上的拓扑. 由以上所述知, A^* 的弱拓扑是使 A^{**} 中的元素都连续的拓扑. 又 $A \subset A^{**}$, 又可以由此引入一种有用的拓扑, 称之为 A^* 的弱*拓扑, 它是使 A 中的元素都连续的最弱的拓扑. 即 A^* 的弱*拓扑是由以下形式的集合构成的基的拓扑:

$$U(\varphi_0; \hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n, \varepsilon) = \{\varphi \in A^* \mid |\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i(\varphi_0)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\text{或 } U(\varphi_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) = \{\varphi \in A^* \mid |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon, \\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

其中 $\varphi_0 \in A^*, x_1, \dots, x_n \in A, \hat{x}_i(\varphi) = \varphi(x_i), \varepsilon > 0$.

A^* 的弱拓扑被 A^{**} 所决定, 而 A^* 的弱*拓扑由 A 决定, 又 A 可以嵌入 A^{**} , 所以弱*拓扑比弱拓扑要弱.

定理13 (Alaoglu定理). 设 A 是赋范线性空间, 令

$$S^* = \{\varphi \in A^* \mid \|\varphi\| \leq 1\}.$$

则 S^* 是弱*紧的, 即在 A^* 的弱*拓扑下, S^* 是紧的.

证 对于每个 $x \in A$, 令 $A_x = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| \leq \|x\|\}$. 因为 A_x 是 \mathbb{C} 的有界闭集, 所以 A_x 是紧集.

若 $\varphi \in S^*$, φ 可以看成广义序列 $\{\varphi(x)\}$, 且由 $\|\varphi\| \leq 1$ 知

$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|x\|$. 所以 $\varphi(x) \in A_x$. 故

$$S^* \subset \prod_{x \in A} A_x.$$

由Tychonoff定理知 $\prod_{x \in A} A_x$ 也是紧空间, 而 S^* 是这个紧空间的子集, 要证明 S^* 是紧的. 只需证明 S^* 是闭的. 即证明在 A^* 的弱*拓扑下, S^* 的极限点含于 S^* 内.

任取 $t = (t_x)$ 是 S^* 的一个极限点, 要证明 $t \in S^*$, 只需证明

$$t_{x+y} = t_x + t_y, \quad (\forall x, y \in A),$$

$$t_{\alpha x} = \alpha t_x \quad (\alpha \in \mathbb{C}, x \in A),$$

$$\|t\| \leq 1.$$

设 $x, y \in A$. 任取 $\varepsilon > 0$. 按 A^* 的弱*拓扑定义, 知

$$U(t; x, y, x+y, \varepsilon) = \left\{ s \in \prod_{x \in A} A_x \mid |s_x - t_x| < \varepsilon, \right.$$

$$\left. |s_y - t_y| < \varepsilon, |s_{x+y} - t_{x+y}| < \varepsilon \right\}$$

是 t 的一个邻域. 因为 t 是 S^* 的极限点, 故该邻域中包含 S^* 的点, 即存在 $\varphi \in S^*$ 使得 $\varphi \in U(t; x, y, x+y, \varepsilon)$. 所以

$$\begin{aligned} |(t_{x+y} - t_x - t_y) - (\varphi_{x+y} - \varphi_x - \varphi_y)| &\leq |t_{x+y} - \varphi_{x+y}| + |t_x - \varphi_x| \\ &\quad + |t_y - \varphi_y| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

但 $\varphi \in S^*$ 是线性的, 即 $\varphi_{x+y} - \varphi_x - \varphi_y = 0$, 所以有

$$|t_{x+y} - t_x - t_y| < 3\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 得

$$t_{x+y} = t_x + t_y.$$

类似地可证

$$t_{\alpha x} = \alpha t_x.$$

又由 $|t_x - \varphi_x| < \varepsilon$, 得 $|t_x| < |\varphi_x| + \varepsilon \leq \|x\| + \varepsilon$. 再由 ε 的任意性, 得 $|t_x| \leq \|x\|$, 即 $\|t\| \leq 1$. 所以 S^* 是弱*闭的. 证毕.

§ 3.5 Gelfand表示理论

由 § 3.3 的讨论知, 若 A 是具有单元的可交换的 Banach 代数. \mathcal{M} 是 A 的极大理想的集合. $\mathcal{J}(A)$ 是 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的所有非零代数同态的集合, 则 \mathcal{M} 和 $\mathcal{J}(A)$ 是一一对应的. 因此下面考虑的 $\mathcal{J}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ 上的变换, 也可以看成是 $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ 上的变换. 对于任意的 $x \in A$, 定义 $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ 的变换 \hat{x} 为:

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall \varphi \in \mathcal{J}(A).$$

\hat{x} 就叫做 x 的 Gelfand 变换.

由定义容易得出 \hat{x} 的以下性质:

$$(1) \quad (x+y)^{\hat{}} = \hat{x} + \hat{y}, \quad x, y \in A.$$

$$\text{因为 } (x+y)^{\hat{}}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \hat{x}(\varphi) + \hat{y}(\varphi). \\ \varphi \in \mathcal{J}(A).$$

$$(2) \quad (xy)^{\hat{}} = \hat{x} \hat{y}. \quad (\text{与}(1)\text{的证明类似})$$

$$(3) \quad (ax)^{\hat{}} = a \hat{x}.$$

故 $x \rightarrow \hat{x}$ 即 $A \longrightarrow \hat{A} = \{ \hat{x} \mid x \in A \}$ 保持以上代数运算, 故为一代数同态.

现定义范数

$$\| \hat{x} \|_{\infty} = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}(A)} | \hat{x}(\varphi) | = \sup_{\varphi \in \mathcal{J}(A)} | \varphi(x) |$$

又由于 $\varphi \in \mathcal{J}(A)$, 由定理 1 知 $\| \varphi \| \leq 1$, 故

$$\| \hat{x} \|_{\infty} \leq \| x \|.$$

即得以下结论.

定理 14 Gelfand 变换是由 A 到 \hat{A} 的模减小的代数同态.

下面在集合 $\mathcal{M}(A)$ 上, 也就是 $\mathcal{J}(A)$ 上, 引入拓扑, 它是使所有的 Gelfand 变换 $\hat{x} (x \in A)$ 都连续的最弱的拓扑, 称为 Gelfand 拓

扑.

任给 $\varphi_0 \in \mathcal{M}(A)$, Gelfand 变换 $\hat{x}(\varphi)$ 在 φ_0 是连续的, 是指当 φ 靠近 φ_0 时(在 \mathcal{M} 中), $\hat{x}(\varphi)$ 和 $\hat{x}(\varphi_0)$ 很接近(在 \mathbb{C} 中). 根据连续映射的定义知, 要使 $\hat{x}(\varphi)$ 是连续的, 必须使开集合的逆映射仍是开集合. 即任给 $\varepsilon > 0$, 集合

$$\{\varphi \in \mathcal{M}(A) \mid |\hat{x}(\varphi) - \hat{x}(\varphi_0)| < \varepsilon\}$$

必须是开的. 将该集合记作 $U(\varphi_0, x, \varepsilon)$; 即

$$U(\varphi_0; x, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{M} \mid |\hat{x}(\varphi) - \hat{x}(\varphi_0)| < \varepsilon\}$$

必须是开的.

设 $\varphi_0 \in \mathcal{M}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, 记

$$U(\varphi_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{M} \mid |\hat{x}_i(\varphi) - \hat{x}_i(\varphi_0)| < \varepsilon, \\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

则 $U(\varphi_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^n U(\varphi_0; x_i, \varepsilon)$.

显然, 任意两个 $U(\varphi_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon)$ 的交集仍是这样的集合. 考虑可以表示成任意多个 $U(\varphi_0; x_1, \dots, x_n, \varepsilon)$ 这种集合的并的集合全体即构成一个拓扑. 这个拓扑以 $U(\varphi_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon)$ 为基. 在这个拓扑下所有 Gelfand 变换 \hat{x} 都是连续的, 由此知 Gelfand 拓扑具有一组基, 它包含了所有形如 $U(\varphi_0; x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon)$ 的集合.

引入 Gelfand 拓扑后, \hat{x} 是 \mathcal{M} 上的连续泛函, 即 $\hat{x} \in C(\mathcal{M})$, 或 $\hat{A} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ 是 $C(\mathcal{M})$ 的一个子空间. 事实上 \hat{A} 也是一个子代数, 且 \hat{A} 可以分离点, 即若 $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ 且 $\varphi \neq \psi$, 则存在 $x \in A$, 使得

$$\hat{x}(\varphi) \neq \hat{x}(\psi),$$

或

$$\varphi(x) \neq \psi(x).$$

因为 $\mathcal{A}(A)$ 与 \mathcal{M} 是一一对应的, 故由 $\varphi \neq \psi$ 知 φ 和 ψ 所对应的极大

理想也是不同的,也就是说 φ 和 ψ 的核是不同的,因此可取 $x \in \ker \varphi$ 而 $x \notin \ker \psi$. 所以存在 x 使

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) \neq 0.$$

故 $\varphi(x) \neq \psi(x)$ 或 $\hat{x}(\varphi) \neq \hat{x}(\psi)$. 由此知我们可以用 Gelfand 变换 \hat{x} 区分极大理想,或区分 $A \rightarrow C$ 的代数同态.

定理15 在Gelfand拓扑下, \mathcal{M} 是紧的Hausdorff空间.

证 任给 $\psi \in \mathcal{M}(A)$, 作用在每一个 $x \in A$ 上得广义序列 $(\psi(x))$. 故 ψ 可以看作乘积空间 $\prod_x C_x$ 的点. 又 ψ 是代数同态,由

定理1知 $\|\psi\| \leq 1$. 故 \mathcal{M} 可以看成单位球 $S^* = \{\varphi \in \mathcal{M} \mid \|\varphi\| \leq 1\}$ 的一个子集. 又Gelfand拓扑正是 S^* 上的弱*拓扑,故由Alaoglu定理 S^* 是紧的. 若能证明 \mathcal{M} 是闭的,则 \mathcal{M} 必为紧集合. 又

$$\mathcal{M} = \left\{ t \in \prod_x C_x \mid \begin{array}{l} t_{x+y} = t_x + t_y, \quad t_{\lambda x} = \lambda t_x, \quad t_{xy} = t_x t_y, \\ t_e = 1 \quad \|t\| \leq 1 \end{array} \right\},$$

与证明Alaoglu定理同,可证满足 $t_{x+y} = t_x + t_y$ 的集合一定是闭的. 同样,满足 $t_{\lambda x} = \lambda t_x$, $t_{xy} = t_x t_y$, $t_e = 1$, $\|t\| \leq 1$ 的集合也是闭的. 故 \mathcal{M} 是五个闭集的交集,所以 \mathcal{M} 是闭的;即 \mathcal{M} 是紧的.

又由于 \hat{A} 可区分 \mathcal{M} 的点,即 $\varphi \neq \psi$, 则 $\hat{x}(\varphi) \neq \hat{x}(\psi)$, 且 \hat{x} 是连续的. 故当 $\varphi \neq \psi$, 可以找到两个不同的邻域(Gelfand 拓扑下)盖住 $\hat{x}(\varphi)$ 和 $\hat{x}(\psi)$. 因此 \mathcal{M} 是紧Hausdorff空间. 定理得证.

由以上讨论知, Gelfand 变换 $x \rightarrow \hat{x}$ 是由于 A 到 $\hat{A} \subset C(\mathcal{M})$ 上的代数同态,且

$$\begin{aligned} (x+y)^{\hat{}} &= \hat{x} + \hat{y}, \quad (xy)^{\hat{}} = \hat{x} \hat{y}, \quad (ax)^{\hat{}} = a \hat{x}, \quad \hat{e} = 1, \\ \hat{0} &= 0. \end{aligned}$$

同时有 $\|\hat{x}\|_{\infty} \leq \|x\|$. \hat{A} 包含常数而且可以分离点.

A 是可交换的Banach代数, A 究竟是什么呢,这很抽象. 引入Gelfand变换后,得出 $A \rightarrow C(\mathcal{M})$. $C(\mathcal{M})$ 是很具体的,是紧空间上的连续函数. 这样我们就将抽象的内容具体化了.

应该指出: $A \rightarrow C(\mathcal{M})$ 的对应不一定是一一的,因为 $x \neq y$ 可

能有 $\hat{x} = \hat{y}$, 也就是 $x \neq 0$ 时可能有 $\hat{x} = 0$. 为此我们考虑 Gelfand 变换的核 $\{x \mid \hat{x} = 0\}$. 可以证明

$$\{x \mid \hat{x} = 0\} = \bigcap_{M \in \mathcal{A}} M.$$

事实上, 若 $\hat{x} = 0$, 则对一切 φ , $\hat{x}(\varphi) = 0$. 即对一切 φ 有 $\varphi(x) = 0$. 故 $x \in \ker \varphi = M$, $\forall \varphi$. 所以 $x \in \bigcap_{M \in \mathcal{A}} M$.

反之, 若 $x \in \bigcap_{M \in \mathcal{A}} M$, 则 x 属于 \mathcal{A} 中的每一个 M . 也就是说 $x \in \ker \varphi$, $\forall \varphi$. 即对一切 φ 有 $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x) = 0$. 所以 $\hat{x} = 0$.

以上说明 Gelfand 变换的核是所有极大理想的交集, 仍为一个理想, 称为 A 的根. Gelfand 变换是一一对应的充要条件是 A 的根等于 $\{0\}$, 即 Gelfand 变换是 $A \rightarrow C(\mathcal{A})$ 内的一个同构映射的充要条件是 $\bigcap_{M \in \mathcal{A}} M = \{0\}$.

当 $\bigcap_{M \in \mathcal{A}} M = \{0\}$ 时, 称 A 为半单纯的.

例 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 是 X 上所有连续函数构成的空间, 则 $C(X)$ 是一个具有单元的可交换的 Banach 代数.

(1) $C(X)$ 上的极大理想集合 \mathcal{A} 是什么?

令 $M_a = \{f \in C(X) \mid f(a) = 0\}$

现在证明 $M_a \in \mathcal{A}$. 显然 M_a 是理想. 因为

$$f \in M_a, g \in M_a \implies f + g \in M_a,$$

$$f \in M_a, h \in C(X) \implies hf \in M_a,$$

$$f \in M_a, \alpha \in \mathbb{C} \implies \alpha f \in M_a,$$

又 $1(x) = 1 \notin M_a$, 故 $M_a \neq C(X)$, M_a 是一个真理想.

再证 M_a 是极大理想, 只需证明, 若 M 是一个理想 $M \supsetneq M_a$,

则 $M = C(X)$.

因为 $M \not\subseteq M_a$, 则存在 $g \in M \setminus M_a$, 所以 $g(a) \neq 0$. 又 $g(x) \in C(X)$, 故存在 a 的邻域 U_a , 当 $x \in U_a$ 时 $g(x) \neq 0$. 另外对一切 $x \in X$, $x \neq a$, 取 $f_x \in M_a$, 使得 $f_x(x) \neq 0$, 由 $f \in C(X)$ 知, 存在 x 的邻域 U_x , 使得当 $x \in U_x$ 时 $f_x \neq 0$. 这样一来, 对 $x \in X$ 而 $x \neq a$ 有邻域 U_x , 对 a 点有邻域 U_a , U_x 和 U_a 构成了 X 的一个开覆盖, 即 $\{U_x | x \in X, x \neq a\} \cup \{U_a\}$ 是 X 的一个开覆盖, 又 X 是紧空间, 故一定存在 X 的有限开覆盖 $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}, U_a$, 且存在 $f_{x_i} \in M_a$, 在 U_{x_i} 上 $f_{x_i} \neq 0$, 同时有 $g \in M$, 且 $g(a) \neq 0$. 所以在 x 上有

$$|f_{x_1}|^2 + |f_{x_2}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2 + |g|^2 > 0.$$

又 $f_{x_i} \cdot \overline{f_{x_i}} \in M_a$, $g \cdot \overline{g} \in M$, M 是理想, 所以

$$f = |f_{x_1}|^2 + |f_{x_2}|^2 + \dots + |f_{x_n}|^2 + |g|^2 \in M,$$

在 X 上处处不为零; 故 f 有逆元素, 也就是说, M 包含可逆元素. 所以 $M = C(X)$. 这就证明了 $M_a \in \mathcal{M}$.

再证明 $\mathcal{M} = \{M_a | a \in X\}$. 为此只需证明任取 $M \in \mathcal{M}$, 必存在 $a \in X$, 使 $M = M_a$. 取 $M \in \mathcal{M}$, 考虑集合 $\cap \{f^{-1}(0) | f \in M\}$, 其中 $f^{-1}(0) = \{x \in X | f(x) = 0\}$. 显然 $\cap \{f^{-1}(0) | f \in M\}$ 是非空的, 因为否则对一切 $x \in X$ 都有 $f \in M$ 使 $f(x) \neq 0$. 与以上证明 $M_a \in \mathcal{M}$ 的方法完全相同, 可以证明 M 中含可逆元素, 故 $M = C(X)$. 所以 $\cap \{f^{-1}(0) | f \in M\}$ 是非空的. 再证明这个集合只含一个点, 即存在某个 $a \in X$, 使

$$\cap \{f^{-1}(0) | f \in M\} = \{a\}.$$

用反证法. 若 $\cap \{f^{-1}(0) | f \in M\} \supset \{a, b\}$, $a, b \in X$. 则 M 中的函数 $f(x)$ 必满足 $f(a) = f(b) = 0$. 又 $C(X)$ 中至少存在一个 $g(x)$ 使 $g(a) = 0$ 而 $g(b) \neq 0$. 将这样的 $g(x)$ 的全体和 M 一起构成一个新的集合 M_1 :

$$M_1 = \{f \in C(X) | f(a) = 0\}.$$

前面已经证明了 $M_1 \in \mathcal{M}$. 又 $M_1 \supsetneq M$, 同时 $M_1 \neq C(X)$. 这与 M 是

极大理想是矛盾的.

由以上结论知, M 中的函数必满足 $f(a)=0$, 所以 $M=M_a$. 故

$$\mathcal{M}=\{M_a|a\in X\}.$$

这个事实说明任给一个 $a\in X$ 都对应着 \mathcal{M} 中的一个极大理想, 反之, 任给一个极大理想, 都有 X 中的一个元素与之对应, 即 $a\longleftrightarrow M_a$; 这就构成了 X 与 \mathcal{M} 之间的一一对应 $X\longleftrightarrow\mathcal{M}$.

(2) 再研究 $\mathcal{A}(C(X))$

已经知道, 任给 $\varphi\in\mathcal{A}(C(X))$, 存在 $a\in X$ 使 $\ker\varphi=M_a$. 任给 $f\in C(X)$, 现在研究 $\varphi(f)=?$.

因为 $f-\varphi(f)\cdot 1\in\ker\varphi$, 所以 $f(a)-(\varphi(f)\cdot 1)(a)=0$. 即 $f(a)=\varphi(f)$.

归纳以上结论知, 对于每一个 $\varphi\in\mathcal{A}(C(X))$, 存在一个 $a\in X$, 使 $\ker\varphi=M_a$. 且 $\varphi(f)=f(a)$ 对一切 $f\in C(X)$ 成立. 这样又构成了 \mathcal{A} 与 X 之间的一一对应: $\mathcal{A}\longleftrightarrow X$. 所以得

$$\mathcal{M}\longleftrightarrow X\longleftrightarrow\mathcal{A}.$$

(3) 考虑 Gelfand 变换: $\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$. 又由于对每个 $\varphi\in\mathcal{A}$ 存在 $a\in X$ 使得 $\varphi(f)=f(a)$, 故存在 $a\in X$, 使

$$\hat{f}(\varphi)=f(a).$$

又 $\hat{f}:\mathcal{M}\rightarrow\mathbb{C}$, 与 $f:X\rightarrow\mathbb{C}$ 相对应, \mathcal{M} 与 X 一一对应, 在 Gelfand 拓扑下, $\hat{f}(\varphi)$ 是连续的, 所以 $f(a)$ 也是连续的. 因此 Gelfand 拓扑较 X 上的原来拓扑要弱.

由于 X 与 \mathcal{M} 一一对应, 现在考虑映射 $X\rightarrow X(=\mathcal{M})$. 即映射 $x\rightarrow M_x$. X 上是原来的拓扑, $X(=\mathcal{M})$ 上是 Gelfand 拓扑. 因为 Gelfand 拓扑较 X 上原来拓扑要弱, 故 Gelfand 拓扑下的开集合一定是原来拓扑下的开集, 也就是 $X(=\mathcal{M})$ 中的开集合的逆映象必是 X 中的开集合. 所以 $X\rightarrow X(=\mathcal{M})$ 是连续映射.

反之, 可以证明映射 $X(=\mathcal{M})\rightarrow X$ 也是连续的. 现在证明这一事实. 任取闭集合 $K\subset X$, 则 $X\setminus K$ 是 X 中的开集合. 若能证明 K 在 Gelfand 拓扑下也是闭的, 则其余集在 Gelfand 拓扑下必是开的.

这样 $X(=\mathcal{M}) \rightarrow X$ 必为连续映射.

因 X 是紧空间, $K \subset X$ 是闭集, 故 K 也是紧的, 又已证 $X \rightarrow X(=\mathcal{M})$ 是连续的, 且连续映射将紧集合映射成紧集合, 故 K 在 Gelfand 拓扑下也是紧的. 又 $X(=\mathcal{M})$ 是紧 Hausdorff 空间, 今证 K 是闭的. 只需证明, 若 $x \notin K$ 则 $x \notin \overline{K}$.

任取 $k \in K$ 而 $k \neq x (x \in X)$. 由于 X 是 Hausdorff 空间, 存在 $U_k \ni k, V_x \ni x$, 且 $U_k \cap V_x = \emptyset$. 即 $\overline{U_k} \not\ni x$. 作 $\{U_k | k \in K\}$, 就是 K 的一个开覆盖, 且 $x \notin \overline{U_k}$. 又 K 是紧的, 故有

$$U_{k_1} \cup U_{k_2} \cup \cdots \cup U_{k_n} \supset K.$$

而每一个 $\overline{U_{k_i}} (i=1, \dots, n)$ 都不包含 x . 所以

$$\overline{(U_{k_1} \cup U_{k_2} \cup \cdots \cup U_{k_n})} = \overline{U_{k_1}} \cup \overline{U_{k_2}} \cup \cdots \cup \overline{U_{k_n}},$$

不包含 x , 所以 $x \notin \overline{K}$. 故 K 是闭的.

以上得到了映射 $X \rightarrow X(=\mathcal{M})$ 及映射 $X(=\mathcal{M}) \rightarrow X$ 都是连续的, 所以 X 上的原来拓扑与 Gelfand 拓扑完全一样, 也就是 $\mathcal{M} = X$. 由 $\hat{f}(\varphi) = f(a)$ 知 $\hat{C}(\mathcal{M}) = \hat{C}(X) = C(\mathcal{M})$.

由此得知 $\hat{C}(X)$ 就是原来的 Banach 代数 $C(X)$. 我们知道引入 Gelfand 变换的目的是将一般的 Banach 代数具体化. 现 $C(X)$ 已是具体的 Banach 代数, 在 Gelfand 代数同态下得到的象仍是 $C(\mathcal{M})$ 也是具体的. 这是紧空间 X 上讨论 $C(X)$ 引出的必然结果.

若 X 不是紧空间, 可以考虑 X 上的所有有界连续函数 $C(X)$, 仍用 $\| \cdot \|_\infty$ 作为 $C(X)$ 上的范数, 得一个有单元的可交换的 Banach 代数. 考虑 $C(X)$ 上的极大理想集合 \mathcal{M} . 则必有

$$\mathcal{M} \neq X.$$

因为 X 不是紧的, 而 \mathcal{M} 在 Gelfand 拓扑下是紧的. 又任给 $x \in X$, 对应的 $M_x = \{f \in C(X) | f(x) = 0\}$ 必为极大理想, 即 $x \rightarrow M_x \in \mathcal{M}$. 所以 $\mathcal{M} \supset X$. 这样一来, 对于 X , 得到包含 X 的紧空间 \mathcal{M} , 称 \mathcal{M} 为 X 的 Stone-Cech 紧化.

由此知若 X 不是紧空间, 则可将 X 嵌入到一个紧空间 \mathcal{M} 中. 其办法之一是考虑 X 上的有界连续函数集合 $C(X)$, 作成 Banach 代

数, 研究 $C(X)$ 的结构空间, 即极大理想空间, 即得 \mathcal{M} .

另外还有一种最常用的紧化方法, 叫做一点紧化 (*one-point-compactification*). 若 X 不紧, 考虑

$$X_p = X \cup \{p\}, \quad p \notin X.$$

在 X_p 上定义开集如下: $U \subset X_p$ 是开集是指:

(1) $p \notin U$ 且 U 是 X 中的开集,

或 (2) $p \in U$ 且 $X_p \setminus U$ 在 X 中是紧且闭的.

不难验证, 这样定义的开集是 X_p 上的拓扑, 且可将 X 嵌入到 X_p 中, 同时 X_p 是紧的.

例如当 $X = \mathbb{R}$ 加上一点 $p = \infty$ 得 X_∞ . 则在 X_∞ 中或者 (a, b) 是开的, 或者余集为闭区间的集合是开集. X_∞ 是紧的且 X 嵌入 X_∞ 中.

例 令 $A(U) = \{f: \bar{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 在 } U \text{ 上连续, 在 } U \text{ 内解析}\}$, 其中 U 为单位圆. 取 $\|f\|_\infty$ 为范数, 则 $A(U)$ 是一个可交换的具有单元的 Banach 代数. 现在研究它的非零代数同态 φ , 即研究 $A(U)$ 的结构空间 $\mathcal{J}(A)$.

在 $A(U)$ 中取 $f_0(z) = z$, 则 $\varphi(f_0)$ 为一复数, 记作 α , $\varphi(f_0) = \alpha$. 由 $f_0(z) = z$ 及 $f_0^*(z) = \bar{z}$, 得

$$\begin{aligned} P_n(z) &= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \\ &= (c_0 + c_1 f_0 + c_2 f_0^2 + \cdots + c_n f_0^n)(z) \\ &= P_n(f_0)z. \end{aligned}$$

由于 $\varphi(f_0) = \alpha$, 且 α 为代数同态, 故

$$\varphi(p_n) = p_n(\alpha),$$

即 φ 作用在多项式 $P_n(z)$ 上是已知的.

现在利用多项式在 $A(U)$ 中是稠密的这个事实来求出当 $f \in A(U)$ 时 $\varphi(f) = ?$

任取 $f \in A(U)$, $f(z)$ 在单位圆上一致连续, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 r , $0 < r < 1$, 使得

$$|f(z) - f(rz)| < \varepsilon$$

对一切 $z \in \bar{U}$ 恒成立. 又 $f(rz)$ 在闭圆 $|z| \leq 1$ 上解析, 所以 $f(rz)$ 可

以展成幂级数:

$$f(rz) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (rz)^n.$$

且该幂级数在单位圆 $|z| \leq 1$ 上一致收敛.

记 $P_i = \sum_{n=0}^i a_n (rz)^n$, 则 $\lim_{i \rightarrow \infty} P_i = f$. 又 φ 是代数同态, φ

连续且 $\|\varphi\| \leq 1$, 所以

$$\varphi(f) = \varphi(\lim_{i \rightarrow \infty} P_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(P_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(\alpha) = f(\alpha).$$

其中 $\alpha = \varphi(f_0) \in \mathbb{C}$. 又 $f_0(z) = z$, 有

$$|\alpha| = |\varphi(f_0)| \leq \|\varphi\| \|f_0\|_* \leq \|f_0\|_* = 1.$$

故 $\alpha \in \overline{U}$.

由此得出, 任给 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$, 则有 $\alpha \in \overline{U}$, 使得

$$\varphi(f) = f(\alpha), \quad \forall f \in A(U)$$

反之, 任给 $\alpha \in \overline{U}$, 可定义 $\varphi: A \rightarrow \mathbb{C}$ 为

$$\varphi(f) = f(\alpha).$$

则显然 φ 是一个代数同态, 且 $\varphi(f_0) = f_0(\alpha) = \alpha$.

综上所述, $\varphi \in \mathcal{A}(A(U))$ 与 $\alpha \in \overline{U}$ 构成一一对应 $\varphi \longleftrightarrow \alpha$. 即 $\mathcal{A}(A(U)) \longleftrightarrow \overline{U}$. 这就是说 $A(U)$ 的结构空间就是单位圆 \overline{U} .

可以证明 $\mathcal{A}(A(U))$ 的 Gelfand 拓扑就是复平面上单位圆 \overline{U} 上的一般拓扑.

§ 3.6 无单元的 Banach 代数

对于无单元的 Banach 代数 A , 同样可以研究它的极大理想集合 $\mathcal{M}(A)$, 也可以考虑它的非零代数同态的集合 $\mathcal{A}(A)$. 然而, 从下面一个简单的例子可以看出, 此时 $\mathcal{M}(A)$ 和 $\mathcal{A}(A)$ 不再是一一对应的.

例 设 A 是 Banach 空间, 在其上定义乘法如下:

$$x \cdot y = 0, \quad \forall x, y \in A.$$

则显然 A 是一个可交换的 Banach 代数, 没有单位元素.

然而, 没有任何一个 A 到 \mathbb{C} 的非零代数同态. 事实上, 若 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$, $\varphi \neq 0$, 则必存在 $x \in A$ 使 $\varphi(x) \neq 0$, 但 $xy = 0 \quad \forall y \in A$, 故

$$0 = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

又 $\varphi(x) \neq 0$, 所以 $\varphi(y) = 0$. 今取 $y = x$ 得

$$0 = \varphi(x^2) = (\varphi(x))^2.$$

与 $\varphi(x) \neq 0$ 矛盾. 所以 $\mathcal{A}(A) = \phi$.

再考虑 $\mathcal{M}(A)$. 任取 $\varphi \in A^*$, 令 $I = \ker \varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$, 则 I 必为一极大理想. 实际上 I 是 A 的子空间. 事实上, 若 $y \in I$, $z \in I$, 则显然 $y+z \in I$, 且若 $y \in I$ 则 $\alpha y \in I$ ($\because \varphi(\alpha y) = \alpha \varphi(y) = 0$), 又若 $x \in A$, $y \in I$, 则 $xy = 0$, 故 $\varphi(xy) = 0$, 所以 $xy \in I$.

由以上事实知 $\mathcal{A}(A)$ 与 $\mathcal{M}(A)$ 不是一一对应的.

我们知道, 没有单元的 Banach 代数 A 可嵌入到有单元的 Banach 代数 A_e 中, 其中

$$A_e = \{(x, \alpha) \mid x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

且 $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$, $A \rightarrow A_e$ 是指 $x \rightarrow (x, 0)$, 且 $\|x\| = \|(x, 0)\|$.

下面证明 A 是 A_e 的一个极大理想. 因为

$$A = \{(x, 0) \mid x \in A\}.$$

又按乘法定义, 对于 $(y, \alpha) \in A_e$ 有

$$(x, 0)(y, \alpha) = (xy + \alpha x, 0) \in A,$$

故 A 为一个理想. 若 $I \supsetneq A$ 是一个理想, 则必存在 $(x, \alpha) \in I$,

而 $(x, \alpha) \notin A$, 即 $\alpha \neq 0$. 又 $(-x, 0) \in A \subset I$, 故 $(x, \alpha) + (-x, 0) = (0, \alpha) \in I$, 又 $\alpha \neq 0$, 故 $(0, \alpha)$ 可逆, 所以 $(0, 1) = e \in I$. 即 $I = A_e$, A 是极大理想得证.

由于 A_e 具有单元, 故 $\mathcal{M}(A_e)$ 和 $\mathcal{A}(A_e)$ 是一一对应的. 令 ψ 是 A_e 上的非零代数同态, 其核为 A , 现在研究 $\mathcal{M}(A_e) \setminus \{A\}$, 也就是

研究 $\mathcal{J}(A_e) \setminus \{\psi_e\}$. 任取 $\psi \in \mathcal{J}(A_e) \setminus \{\psi_e\}$, 将 ψ 限制在 A 上, 由于 $\ker \psi \neq A$, 故 ψ 可以看成 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的非零代数同态.

$$\psi|_A(x) = \psi((x, 0)), \quad \psi|_A \neq 0.$$

反之, 若 φ 是 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的非零代数同态, 则 φ 可唯一地扩张到 A_e 上, 事实上, 由于 φ 是代数同态, 故可按以下方法将 φ 扩张到 A_e 上:

$$\psi((x, \alpha)) = \varphi((x, 0)) + \varphi((0, \alpha)).$$

又 $\varphi((0, 1)) = 1$, 故 $\psi((0, \alpha)) = \alpha\varphi((0, 1)) = \alpha$, 所以

$$\psi((x, \alpha)) = \varphi((x, 0)) + \alpha.$$

显然这种扩张是唯一的, 且将 $\psi: A_e \rightarrow \mathbb{C}$ 限制在 A 上即为原来的 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的代数同态.

由以上讨论知, 可以将 A 嵌入到 A_e 中, 对 A_e 应用 § 3.5 的结论知 $\mathcal{M}(A_e) \setminus \{A\}$ 与 $\mathcal{J}(A_e) \setminus \{\psi_e\}$ 构成一一对应, 即 $\psi \in \mathcal{J}(A_e) \setminus \{\psi_e\}$ 与 $\ker \psi = M \in \mathcal{M}(A_e) \setminus \{A\}$ 是一一对应的. 将 ψ 限制在 A 上, 记为 $\psi|_A$.

令 $\varphi = \psi|_A$, 则显然 $\varphi \in \mathcal{J}(A)$. 我们知道 $\ker \varphi = \ker \psi|_A = (\ker \psi) \cap A$. 且 $\ker \varphi$ 为 A 中的极大理想. 前面的例子已经说明 $\mathcal{J}(A)$ 不再和 A 的极大理想集合相对应, 那么我们要问 $\mathcal{J}(A)$ 对应“什么”? 也就是 $\mathcal{J}(A) \longleftrightarrow$ “?”, “?” 又和 A 的极大理想集合有什么关系.

若 φ 是 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的一个非零代数同态, 则 $\ker \varphi$ 必是 A 的极大理想. 由于 φ 是代数同态, 故存在 $v \in A$ 使 $\varphi(v) = 1$. 于是

$$\varphi(x - xv) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(v) = 0, \quad \forall x \in A.$$

即 $x - xv \in \ker \varphi, \quad \forall x \in A.$

定义 4 若无单元的可交换的 Banach 代数 A 中的理想 I , 具有以下性质: 存在 $v \in A$, 使得 $x - xv \in I$ 对一切 $x \in A$ 成立, 则称 I 为正则理想.

可见, 若 $\varphi \in \mathcal{J}(A)$, 则 $\ker \varphi$ 是 A 上的正则极大理想.

定理 16 若 A 是无单元的可交换的 Banach 代数, 对于 A 的任一正则极大理想 M , 必存在一个 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的非零代数同态 φ_M , 使得 $\ker \varphi_M = M$.

证 首先证明 M 是闭集. 因为 M 是正则极大理想, 故存在 $v \in A$ 使

得 $x - xv \in M$ 对一切 $x \in M$ 成立, 可以证明对一切 $y \in M$ 必有 $\|v - y\| \geq 1$.

用反证法, 若存在 $y \in M$ 使 $\|v - y\| < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (v - y)^n$ 是收敛的. 令

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v - y)^n = z \quad (n \neq 0, \text{ 因为 } A \text{ 中无单元}), \quad z \in A.$$

又

$$(v - y)z = \sum_{n=1}^{\infty} (v - y)^{n+1},$$

故
$$(v - y)z + (v - y) = \sum_{n=1}^{\infty} (v - y)^n = z.$$

所以
$$v = y + z - vz + yz.$$

因为 M 是正则理想 $z - vz \in M$, $y \in M$, $yz \in M$. 所以 $v \in M$. 故对一切 $x \in A$ 有 $xv \in M$. 又 $x - xv \in M$, 所以 $x \in M$. 由此得到 $A = M$, 与 M 是极大理想矛盾. 所以对一切 $y \in M$ 必有 $\|v - y\| \geq 1$.

由此知 $v \notin \overline{M}$, 故 $\overline{M} \neq A$, 又 $M \subset \overline{M} \neq A$, 而 \overline{M} 也是理想, 所以 $M = \overline{M}$. 这就证明了 M 是闭集.

M 是闭集, 作商集合 A/M , 则 A/M 是 Banach 代数, 又因为 $x - xv \in M$, 所以 A/M 具有单元 $\dot{v} = v + M$. 又 M 是极大理想, 故 A/M 是一个域. 根据 Gelfand—Mazur 定理, $A/M = C\dot{v}$, 即对 $x \in A$, 则 $\dot{x} = x + M$ 对应一个复数 $\varphi_M(x)$, 使 $\dot{x} = \varphi_M(x)\dot{v}$, 也就是说有代数同态 φ_M 使 $x \in A$ 对应复数 $\varphi_M(x)$. 即

$$x \longleftrightarrow \varphi_M(x), \quad \forall x \in A.$$

而且 $\ker \varphi_M(x) = M$. 这样的 φ_M 就是所求的代数同态. 定理得证.

若以 $\mathcal{M}(A)$ 代表 A 中所有正则极大理想集合, 则 $\mathcal{Z}(A)$ 和 $\mathcal{M}(A)$ 一一对应: $\mathcal{Z}(A) \longleftrightarrow \mathcal{M}(A)$. 这样就回答了前面提出的问题. “?” $= \mathcal{M}(A)$.

再讨论 Gelfand 变换 $\hat{x}: \mathcal{M}(A) \rightarrow C$. 与前同有

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x), \quad \forall x \in A.$$

其中 $\varphi \in \mathcal{M}(A)$. 由于 A 可扩张成 A_0 , 使 $x \in A$ 与 $(x, 0) \in A_0$ 相对应. 故 $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ 相应地可写成

$$(x, 0) |_{\mathcal{M}(A_0) \setminus \{\psi_0\}}(\varphi) = \varphi(x),$$

或

$$(x, 0) |_{\mathcal{M}(A_0) \setminus \{A\}}(\varphi) = \varphi(x);$$

即

$$(x, 0)\psi |_A = (x, 0)\psi(x, 0) = (x, 0)\varphi(x).$$

其中

$$\varphi(x) = \psi |_A = \psi(x, 0).$$

$\mathcal{M}(A_0)$ 上的 Gelfand 拓扑就是 $\mathcal{M}(A)$ 上的拓扑. $\mathcal{M}(A)$ 是将 $\mathcal{M}(A_0)$ 去掉一点 A , 所以 $\mathcal{M}(A)$ 是 $\mathcal{M}(A_0)$ 的子空间: $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A_0) \setminus \{A\}$. 又在 Gelfand 拓扑下 $\mathcal{M}(A_0)$ 是紧的, 故 $\mathcal{M}(A)$ 是局部紧的. 即 $\mathcal{M}(A)$ 在 Gelfand 拓扑 (使一切 $\hat{x} (x \in A)$ 连续的最弱拓扑) 下是局部紧 Hausdorff 空间.

又 $(x, 0)\psi_0 = \psi_0(x) = 0$ 即 \hat{x} 在 ψ_0 上为零, 故 $\hat{x} \in C_0(\mathcal{M}(A))$. ψ_0 是 $\mathcal{M}(A)$ 中去掉的一点, 故可用一点紧化方法将 $\mathcal{M}(A)$ 紧化.

令 $\hat{A} = \{\hat{x} | x \in A\}$, 由于 \hat{x} 在 $\{\psi_0\}$ 上为零: $\hat{x}(\psi_0) = 0$. 故 \hat{A} 没有单元. 与有单元的 Banach 代数上的结论相同, \hat{A} 也可以区分点.

下面再讨论可交换的 Banach 代数 A 的 Gelfand 变换的值域. 首先讨论 A 有单元的情形.

若 A 是有单元的可交换的 Banach 代数, 其 Gelfand 变换 $\hat{x}: \mathcal{M}(A) \rightarrow C$ 在 Gelfand 拓扑下是连续的. 其值域记为

$$\hat{x}(\mathcal{M}) = \{\hat{x}(\varphi) | \varphi \in \mathcal{M}(A)\}.$$

可以证明 $\hat{x}(\mathcal{M}) = \sigma(x)$.

事实上, $\lambda \in \sigma(x) \iff x - \lambda e \notin G \iff x - \lambda e \in I$, I 是 A 的某个真理想.

又 I 必含于某个极大理想中, 即存在 $M \in \mathcal{M}(A)$ 使得 $I \in M$. 所

以

$\lambda \in \sigma(x) \iff x - \lambda e \in M, M \in \mathcal{M}(A) \iff$ 存在 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$ 使得 $\varphi(x - \lambda e) = 0 \iff$ 存在 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$ 使得 $\varphi(x) = \lambda$.

又 $\varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$, 所以 $\hat{x}(\mathcal{M}) = \sigma(x)$.

由此得出

$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \sup \{ |\hat{x}(\varphi)| \mid \varphi \in \mathcal{A}(A) \} = \sup \{ \lambda \mid \lambda \in \sigma(x) \}$$

所以
$$\|\hat{x}\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

再研究 A 没有单元的情形. 若 A 是无单元可交换的 Banach 代数, 则将 A 扩张成 A_e . 由以上讨论知

$$\hat{x}(m(A_e)) = \sigma_{A_e}(x).$$

又 $(x, 0) - \lambda(0, 1)$ 当 $\lambda = 0$ 时不可逆, 故 $0 \in \hat{x}(\mathcal{M}(A_e))$. 再将 \hat{x} 限制在 $\mathcal{M}(A)$ 上, 定义

$$\sigma(x) = \{0\} \cup \{\hat{x}(\mathcal{M}(A))\}.$$

另外, 自然要研究 A 无单元时如何去定义它的逆元素.

定义 5. 若 A 是无单元的可交换的 Banach 代数, $x, y \in A$, 若 $x + y = xy$, 则称 x, y 互为拟逆.

定义 5 的含义是, 若将 x 和 y 放入 A_e 中去研究, 则 $x - e$ 和 $y - e$ 互为逆元素. 事实上, 若

$$(x - e)(y - e) = xy - x - y + e = e.$$

则必有

$$xy = x + y.$$

由拟逆的定义容易看出, 对于 $x \in A$,

$$\sigma(x) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^{-1}x \text{ 无拟逆}\}.$$

(读者自己证明).

§ 3.7 Banach代数应用举例

下面给出两个定理，定理本身并不包含Banach代数概念，但可以通过Banach代数的技巧加以证明。

定理17. 设 $A(U) = \{f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 在 } \overline{U} \text{ 上连续, } f|_U \text{ 是解析的}\}$. 假设 $f_1, f_2, \dots, f_n \in A(U)$, 使得

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0$$

对一切 $z \in \overline{U}$ 恒成立，则存在 $g_1, g_2, \dots, g_n \in A(U)$ 使得

$$\sum_{i=1}^n f_i(z) g_i(z) = 1. \quad (z \in \overline{U})$$

证 由 § 3.5 的讨论知 $A(U)$ 是有单元的可交换的 Banach 代数，且 $\mathcal{A}(A(U)) \longleftrightarrow \overline{U}$. 即对 $\varphi \in \mathcal{A}(A(U))$, $\varphi \longleftrightarrow \alpha \in \overline{U}$, 使得 $\varphi(f) = f(\alpha)$, ($f \in A(U)$).

现在考虑

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^n g_i f_i \mid g_i \in A(U) \right\},$$

可以证明， I 是 $A(U)$ 中的理想。若能证明 $I = A(U)$ ，则 I 包含有单

元，即存在 $g_i \in A(U)$ ，使 $\sum_{i=1}^n g_i f_i = 1$ ，定理得证。也就是说我们要

证明 I 不是真理想，为此只需证明 I 不包含在 $A(U)$ 的任何一个极大理想中。又每一个极大理想都是某个非零代数同态的核，因此问题归结为需要证明任何一个代数同态 $\varphi(A)$ ，至少有一个 $h \in I$ ，使得 $\varphi(h) \neq 0$ 。

任取 $\varphi \in \mathcal{A}(A(U))$ 。存在 $\alpha \in \overline{U}$ 与之相对应且 $\varphi(f) = f(\alpha)$, ($f \in A(U)$)。又对 $z \in \overline{U}$ ，由题设有

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0,$$

所以, 对于以上所确定的 $\alpha \in \overline{U}$, 有

$$|f_1(\alpha)| + |f_2(\alpha)| + \cdots + |f_n(\alpha)| > 0.$$

因此必有某个 f_i , 使得 $f_i(\alpha) \neq 0$. 所以 $\varphi(f_i) \neq 0$. 又 $f_i \in I$. 故 $I \notin \ker \varphi$. 于是有 $I = A(U)$. 证毕.

定理18. (Wiener定理) 假设

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\theta}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n| < \infty$$

且对每一个 $\theta \in \mathbf{R}$, $f(e^{i\theta}) \neq 0$, 则

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{in\theta}, \quad \text{且有} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |d_n| < \infty.$$

证 记 T 为单位圆周 $|z| = 1$. 令

$$A = \left\{ g : T \rightarrow \mathbf{C} \mid g(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\theta}, \text{ 且 } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n| < \infty \right\}.$$

在 A 上定义运算:

$$(g+h)(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) + h(e^{i\theta}),$$

$$(ag)(e^{i\theta}) = ag(e^{i\theta}),$$

$$(gh)(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta}) \cdot h(e^{i\theta}),$$

并定义范数

$$\|g\| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |b_n|.$$

可以证明 A 是一个有单元的 Banach 代数. 事实上, A 等距同构于 l^1 :

$$l^1 = \left\{ f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| < \infty \right\}$$

在 § 3.1 中已经指出, 当在 l^1 中加法与数乘定义为按坐标相加与相乘, 乘法定义为卷积

$$(f * g)_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k g_{n-k},$$

且取范数为 $\|f\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|$,

则 l^1 为一个有单元的可交换的 Banach 代数.

若 $g \in A$, 则 $(b_n) \in l^1$. $g \longleftrightarrow (b_n)$. A 中的加法与数乘显然和 l^1 中的加法与数乘相对应. 现在看乘法. 若 $g, h \in A$, 则

$$\begin{aligned} gh(e^{i\theta}) &= g(e^{i\theta}) \cdot h(e^{i\theta}) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\theta} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j a_{k-j} e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

所以
$$gh \longleftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{+\infty} b_j a_{k-j}.$$

又 A 与 l^1 的范数定义是相同的, 故 A 等距同构于 l^1 , $A \cong l^1$. 故 A 为一个有单元的可交换的 Banach 代数.

为了用 A 上的 Gelfand 表示理论来解决所提出的问题, 下面研究 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 代数同态的结构. 因为若 $f \in A$, $f(e^{i\theta}) \neq 0$, 若能证明 f 在 A 中可逆, 则定理得证. 为此只需证明

$$f \notin M, \quad \forall M \in \mathcal{M}(A).$$

即
$$f \notin \ker \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}(A).$$

也就是
$$\varphi(f) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}(A).$$

先研究 φ 的结构.

任取 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$, 令 $f_0(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$, 显然 $f_0 \in A$. 且 $\frac{1}{f_0} \in A$. 令 $\varphi(f_0) = \lambda$. 由于 φ 是代数同态, 所以 $\varphi(\frac{1}{f_0}) = \frac{1}{\lambda}$. 又 $\|f_0\| = 1$, 且 $\|\varphi\| \leq 1$. 得

$$|\lambda| = |\varphi(f_0)| \leq \|\varphi\| \|f_0\| \leq 1.$$

另一方面 $\|\frac{1}{f_0}\| = 1$, 有

$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| = \left| \varphi \left(\frac{1}{f_0} \right) \right| \leq \| \varphi \| \left\| \frac{1}{f_0} \right\| \leq 1,$$

所以 $|\lambda| = 1$, 即 $\lambda = e^{i\theta}$.

以上事实说明, 对于每个 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$, 都对应一个点 $e^{i\theta} \in T$, 使得

$$\varphi(f_0) = e^{i\theta} = f_0(e^{i\theta}).$$

由于 φ 是代数同态, 故

$$\varphi(f_0^n) = (\varphi(f_0))^n = e^{in\theta} = f_0^n(e^{i\theta}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

于是对于三角多项式 p , 有

$$\varphi(p) = p(e^{i\theta}).$$

由三角级数在 A 中的稠密性, 得

$$\varphi(g) = g(e^{i\theta}), \quad \forall g \in A.$$

这就是说, 对每一个 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$, 都能找到 T 中一点 $e^{i\theta}$ 与之相对应. 反过来, 对 $e^{i\theta} \in T$, 考虑 $\varphi: g \mapsto g(e^{i\theta})$, 则 φ 必为非零代数同态. ($\because \varphi(1) = 1(e^{i\theta}) = 1$) 即 $\varphi \in \mathcal{A}(A)$. 这样我们得到

$$\mathcal{A}(A) \equiv T.$$

可以验证 $\mathcal{A}(A)$ 上的 Gelfand 拓扑正是 T 上原来的拓扑.

回到 Wiener 定理. 因为 $f(e^{i\theta}) \neq 0$, 即 T 上没有任何一点能使 f 变为 0. 故

$$\varphi(f) = f(e^{i\theta}) \neq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}(A).$$

即 f 不能属于 A 的任何一个代数同态的核. 所以 f 可逆, 即

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{in\theta}$$

成立. 定理得证.

在证明 Wiener 定理的过程中, 证明了 $A \cong l^1$, 且 $\mathcal{A}(A) = T$ 或 $\mathcal{M}(A) = T$. 还可以进一步描述 A 和 $f \in A$ 的 Gelfand 变换 \hat{f} .

$$l^1 = \{ f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| < \infty \}. \quad \mathbb{Z} \text{ 是一个加法群, 在 } \mathbb{Z} \text{ 上}$$

取离散拓扑, 则 \mathbb{Z} 成为可交换的拓扑群. 还可以在 \mathbb{Z} 上取计数测度

μ , μ 关于平移是不变的, 于是可以定义

$$L^1(\mathbf{Z}) = \{f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C} \mid \int_{\mathbf{Z}} |f_n| d\mu(n) < \infty\}.$$

由于

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |f_n| = \int_{\mathbf{Z}} |f_n| d\mu(n),$$

所以

$$l^1 = L^1(\mathbf{Z}),$$

即

$$l^1 = A = L^1(\mathbf{Z}).$$

由此知 $L^1(\mathbf{Z})$ 的所有极大理想是与单位圆周一一对应的, 现在研究 Gelfand 变换.

任给 $f \in A = L^1(\mathbf{Z})$,

$$\hat{f}(e^{i\alpha}) = \hat{f}(\varphi_\alpha) = \varphi_\alpha(f) = f(e^{i\alpha}) \quad (f \text{ 看作 } A \text{ 的元})$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\alpha} \quad (f \text{ 看作 } l^1 \text{ 的元})$$

$$= \int_{\mathbf{Z}} f_n e^{in\alpha} d\mu(n).$$

为了与习惯上一致, 可以用 $e^{-i\alpha}$ 代替 $e^{i\alpha}$, 即 $\varphi_\alpha(f) = f(e^{-i\alpha})$, 则

$$\hat{f}(e^{i\alpha}) = \int_{\mathbf{Z}} f_n e^{-in\alpha} d\mu(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n e^{-in\alpha}.$$

所以 Gelfand 变换就是 Fourier 变换的逆变换.

§ 3.8 群代数 $L^1(\mathbf{R})$ 、 $L^1(\mathbf{T})$ 、 $L^1(\mathbf{Z})$ 上的

Gelfand 理论.

在 § 3.1 中指出, 在一个局部紧的交换群 G 上, 存在一个不变的 Haar 测度 ν , 于是可以研究 $L^1(G)$:

$$L^1(G) = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_G |f(x)| d\gamma(x) < \infty\},$$

再定义范数

$$\|f\|_1 = \int_G |f(x)| d\gamma(x).$$

则 $L^1(G)$ 构成一个Banach空间, 若再定义乘积

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(x-y) d\gamma(y).$$

则 $L^1(G)$ 是一个可交换的Banach代数.

$L^1(G)$ 是一个Banach空间, 它的共轭空间为 $L^\circ(G)$, 即

$$L^1(G)^* = L^\circ(G).$$

其中 $L^\circ(G) = \{\gamma(x): G \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup \gamma(x) < \infty, p.p. \text{ 且 } \gamma(x) \text{ 可测}\}.$

即任给 $\varphi \in L^1(G)^*$, 存在唯一的 $\gamma(x) \in L^\circ(G)$, 使得

$$\varphi(f) = \int_G f(x)\gamma(x) dx, \quad \forall f \in L^1(G),$$

且 $\|\varphi\| = \|\gamma\|_\infty.$

又 R, T, Z 是 G 的特例, R 是一个加法群, 具有通常拓扑和Lebesgue测度. T 是一个乘法群, 若将单位圆上的点 $e^{i\alpha}$ 和实数 R 中 $(-\pi, \pi)$ 上的点 α 相对应, 则也可将 T 看成等价于关于 2π 的同余加法群, 即 $\alpha + 2\pi \equiv \alpha, \text{ mod } 2\pi$. T 上具有通常拓扑和不变测度 $\frac{1}{2\pi}\mu$. Z 是一个加法群具有离散拓扑和计数测度. 因此可以研究 $L^1(R), L^1(T), L^1(Z)$.

若 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, 定义 f_γ 仍为 $G \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射, 且

$$f_\gamma(x) = f(x - \gamma),$$

则有以下二事实:

$$(1) \|f\|_1 = \|f_\gamma\|_1.$$

(2) 对于每一个 $f \in L^1(G)$, 映射 $x \rightarrow f_\gamma$ 是由 G 到 $L^1(G)$ 的连续映射, 即当 x, y 很接近时 $\|f_x - f_y\|_1$ 可以任意小.

为了讨论群代数 $L^1(G)$, 先给出Fubini定理.

定理19. (Fubini定理) 设 (X, \mathcal{S}, μ) 和 $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ 是 σ

—有限的测度空间, $f(x, y)$ 是 $X \times Y$ 上的 $(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ —可测函数.

(1) 若 $0 \leq f(x, y) \leq \infty$, 且若

$$\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\lambda, \quad x \in X, y \in Y,$$

$$\psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu, \quad x \in X, y \in Y,$$

则 φ 是 \mathcal{S} —可测的, ψ 是 \mathcal{T} —可测的, 且

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda) = \int_X \varphi(x) d\mu = \int_Y \psi(y) d\lambda,$$

或写成

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda) &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\lambda(y) \\ &= \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y) d\mu(x). \end{aligned}$$

(2) 若 $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, 则存在 μ —零测集 A_z , 使得对每一个 $x \in X \setminus A_z$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数在 Y 上可积, 即 $f(x, y) \in L^1(\lambda)$ 对几乎所有的 $x \in X$ 成立.

同样, $f(x, y) \in L^1(\mu)$ 对几乎所有的 $y \in Y$ 成立.

若

$$\varphi(x) = \int_Y f(x, y) d\lambda, \quad a.e.$$

$$\psi(y) = \int_X f(x, y) d\mu, \quad a.e.$$

则 $\varphi \in L^1(\mu)$, $\psi \in L^1(\lambda)$, 且

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \lambda) &= \int_X d\mu(x) \int_Y f(x, y) d\lambda(y) \\ &= \int_Y d\lambda(y) \int_X f(x, y) d\mu(x). \end{aligned}$$

1. $L^1(\mathbf{R})$ 、 $L^1(\mathbf{T})$ 、 $L^1(\mathbf{Z})$ 上的代数同态(结构空间或极大理想)。

(1) $L^1(\mathbf{R}) = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ Borel可测}, \int_{\mathbf{R}} |f(x)| d\mu(x) < \infty\}$ 。

注意, 两个几乎处处相等的函数, 我们认为是等值的; 也就是考虑子空间

$$N = \{f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \mid \int_{\mathbf{R}} |f(x)| d\mu(x) = 0\},$$

则按子空间 N 决定了一个等价关系, 即若 $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R})$, 当 $f_1 - f_2 \in N$ 时, 则说 f_1 和 f_2 是等值的。 $L^1(\mathbf{R})$ 中的元素, 实质上是这样的等价类的集合。另外, 如果 f 是 \mathbf{R} 上的 Lebesgue 可测函数, 则在 \mathbf{R} 上存在一个 Borel 可测函数 g , 使得 $f = g$ a.e. 这就是说, 可以在含 f 的等价类中找到一个函数 g 是 Borel 可测的(证明从略)。

在 $L^1(\mathbf{R})$ 中定义了普通的加法和数乘以后, 取范数

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(x)| d\mu(x) = \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx,$$

则 $L^1(\mathbf{R})$ 是一个 Banach 空间。再利用卷积定义乘法

$$f * g(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) g(-y+x) dy, \quad f, g \in L^1(\mathbf{R}),$$

可以证明 $L^1(\mathbf{R})$ 构成一个可交换的 Banach 代数。首先验证范数:

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f * g| dx = \int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(y) g(-y+x) dy \right| dx.$$

这是一个累次积分, 由 Fubini 定理有

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \iint |f(y) g(-y+x)| dy dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} |f(y)| dy \int_{\mathbf{R}} |g(x)| dx \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

同理, 用Fubini定理可证 $f*(g*h) = (f*g)*h$.

再证明 $L^1(\mathbf{R})$ 的可交换性. 注意到Lebesgue测度的不变性, 以及若 A 可测, 则 $-A$ 必可测, 且测度相等. 事实上有

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int_{\mathbf{R}} f(y)g(-y+x)dy = \int_{\mathbf{R}} f(x+y)g(-y)dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)dy = g*f(x). \end{aligned}$$

因此, $L^1(\mathbf{R})$ 是一个可交换的 Banach 代数. 现在研究 $\Delta(L^1(\mathbf{R}))$. 取 $\varphi \in \Delta(L^1(\mathbf{R}))$, 则 φ 一定是一个有界线性变换 ($\|\varphi\| \leq 1$), 故

$$\varphi \in L^1(\mathbf{R})^* = L^\infty(\mathbf{R}).$$

即对于 $\varphi \in L^1(\mathbf{R})^*$, 存在唯一的 $\gamma(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$, 使得

$$\varphi(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\gamma(x)} dx. \quad (3)$$

且 $\|\varphi\| = \|\gamma\|_\infty$ ($\gamma(x)$ 是有界的 Borel 函数).

又 φ 是代数同态保持乘法,

$$\varphi(f*g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$$

$$\begin{aligned} \varphi(f*g) &= \int_{\mathbf{R}} (f*g(x)) \overline{\gamma(x)} dx \\ &= \iint f(y)g(x-y) \overline{\gamma(x)} dy dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(y) \left(\int_{\mathbf{R}} g(x-y) \overline{\gamma(x)} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(y) \varphi(g_y) dy. \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \varphi(f) \cdot \varphi(g) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(g) f(y) \overline{\gamma(y)} \, dy,$$

所以

$$\int_{\mathbf{R}} f(y) \varphi(g_y) \, dy = \int_{\mathbf{R}} \varphi(g) f(y) \overline{\gamma(y)} \, dy.$$

$$\text{即} \quad \int_{\mathbf{R}} f(y) (\varphi(g_y) - \varphi(g) \overline{\gamma(y)}) \, dy = 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbf{R}).$$

$$\text{所以} \quad \varphi(g_y) = \varphi(g) \overline{\gamma(y)} \quad a.e. \quad (4)$$

事实上, 若 $\varphi(g_y) - \varphi(g) \overline{\gamma(y)} \neq 0$ 在一个测度大于零的集合 E 上成立 ($E \subset \mathbf{R}$), 则取 $f(y)$ 为 E 的特征函数, 于是 $\int_{\mathbf{R}} f(y) (\varphi(g_y) - \varphi(g) \overline{\gamma(y)}) \, dy \neq 0$, 矛盾.

由于 $y \rightarrow g_y$ 是由 \mathbf{R} 到 $L^1(\mathbf{R})$ 上的连续函数, φ 是连续的, 故 $\varphi(g_y)$ 是 y 的连续函数.

由于 φ 是非零代数同态, 故可取 $g \in L^1$ 使得 $\varphi(g) \neq 0$. 又 (4) 式左端是 y 的连续函数, 故可改变 $\gamma(y)$ 在一个零测集上的值, 使 (4) 式对于 y 处处成立, 而且在零测集上改变 $\gamma(y)$ 的值并不影响 (3) 式. 这样, 就可以认为 $\gamma(x)$ 是连续的, 也就是由等价类中取出一个连续函数 $\gamma(x)$. 于是得到

$$\varphi(g_y) = \varphi(g) \overline{\gamma(y)}, \quad \forall g \in L^1, \quad \forall y \in \mathbf{R}.$$

利用上式得

$$\varphi(g_{x+y}) = \varphi(g) \overline{\gamma(x+y)}.$$

$$\text{另一方面} \quad g_{x+y} = (g_x)_y,$$

$$\text{事实上,} \quad g_{x+y}(z) = g(z-x-y) = g((z-y)-x) = g_x(z-y) = (g_x)_y(z).$$

$$\text{又} \quad \varphi((g_x)_y) = \varphi(g_x) \overline{\gamma(y)} = \varphi(g) \overline{\gamma(x)} \overline{\gamma(y)},$$

所以有

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

又 $\|\gamma\|_\infty = \|\varphi\| \leq 1$, 且 $\gamma(x) = \gamma(0)\gamma(x)$, 所以 $\gamma(0) = 1$. 由 $1 = \gamma(0) = \gamma(x)\gamma(-x)$, 得 $\gamma(-x) = \gamma(x)^{-1}$. 由此得到

$$|\gamma(x)| = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

因否则若 $|\gamma(x)| < 1$, 则 $|\gamma(-x)| > 1$. 与前面结论矛盾, 所以

$$\|\gamma\|_\infty = 1, \quad |\gamma(x)| = 1.$$

定义 6 若 $\gamma(x)$ 是 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ 的映射, 满足

- (1) $\gamma(x)$ 连续,
- (2) $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$, $(x, y \in \mathbf{R})$
- (3) $|\gamma(x)| = 1$, $(x \in \mathbf{R})$.

则称 $\gamma(x)$ 为 \mathbf{R} 上的连续特征标.

定义中 (2)、(3) 表示 $\gamma(x)$ 是从 \mathbf{R} 上的加法群到 \mathbf{T} 上的乘法群上的代数同态, 即 $\gamma(x)$ 是 \mathbf{R} 到 \mathbf{T} 上的变换, 保持群的运算.

将 \mathbf{R} 上所有连续特征标的集合记作 $\Gamma_{\mathbf{R}} = \Gamma$, 则以上结果表明, 对任意 $\varphi \in \mathcal{A}(L^1(\mathbf{R}))$, 存在唯一的 $\gamma \in \Gamma$, 使得

$$\varphi(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\gamma(x)} dx, \quad (f \in L^1(\mathbf{R}))$$

$$\|\varphi\| = \|\gamma\|_\infty = 1.$$

反之, 对每一个 $\gamma \in \Gamma$, 映射

$$f \xrightarrow{\varphi_\gamma} \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\gamma(x)} dx \quad (f \in L^1(\mathbf{R}))$$

必是 $L^1(\mathbf{R})$ 上的代数同态, 即 $\varphi_\gamma \in \mathcal{A}(L^1(\mathbf{R}))$, 现在证明这一事实.

由于积分的线性性质知 φ_γ 是线性的, 故只需证明

$$\varphi_\gamma(f * g) = \varphi_\gamma(f) \cdot \varphi_\gamma(g).$$

利用 Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}
\varphi_r(f * g) &= \int_{\mathbf{R}} (f * g)(x) \overline{\gamma(x)} dx \\
&= \iint f(y) g(x-y) \overline{\gamma(x)} dy dx \\
&= \iint f(y) g(x) \overline{\gamma(x+y)} dy dx \\
&= \iint f(y) g(x) \overline{\gamma(x)} \overline{\gamma(y)} dy dx \\
&= \varphi_r(f) \cdot \varphi_r(g).
\end{aligned}$$

φ_r 是非零代数同态。因为 $\gamma(0) = 1$, $\gamma(x)$ 是连续的, 故若 f 在 $x = 0$ 附近不为零, 在其余点等于零, 则必有 $\varphi_r(f) \neq 0$ 。而且若 $\varphi_{r_1} \neq \varphi_{r_2}$, 由于

$$\begin{aligned}
\varphi_{r_1}(f) &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\gamma_1(x)} dx, \\
\varphi_{r_2}(f) &= \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\gamma_2(x)} dx,
\end{aligned}$$

显然有, $\gamma_1(x) \neq \gamma_2(x)$ 。

归纳以上结论表明, $L^1(\mathbf{R})$ 上的代数同态 φ 和 \mathbf{R} 上的连续特征标 $\gamma(x)$ 构成一一对应。

$$\mathcal{A}(L^1(\mathbf{R})) \leftrightarrow \Gamma_{\mathbf{R}},$$

其对应关系由 (3) 式给出。

以上讨论了群代数 $L^1(\mathbf{R})$ 的结构空间, 在整个讨论过程中仅用到了 \mathbf{R} 的三个事实:

- 1) 实数 \mathbf{R} 是加法群。
- 2) 实数 \mathbf{R} 上通常拓扑和群的结构相容。
- 3) 实数上取一个不变测度。

因此, 若将 \mathbf{R} 换成另外一个群, 例如 \mathbf{R} 换成 \mathbf{T} 或 \mathbf{Z} , 只要利用以上三个事实, 同样可以得到 $L^1(\mathbf{T})$, $L^1(\mathbf{Z})$ 的结构空间。

$$(2) \quad L^1(T) = \left\{ f: T \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_T |f(x)| d\mu(x) < \infty, \text{ 或 } \frac{1}{2\pi} \int_T |f(x)| dx < \infty \right\}.$$

T 是乘法群或等价于一个加法群关于 2π 同余, 取不变测度 $\frac{1}{2\pi}\mu$ (单位圆对应于 $(-\pi, \pi)$, 测度为 1). 则以上讨论仍成立.

定义乘法为卷积, 即 $f, g \in L^1(T)$

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x f(y) g(x-y) dy,$$

仿照以上作法得

$$\Delta(L^1(T)) \longleftrightarrow \Gamma_T,$$

即 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(x).$

其中 $\gamma(x)$ 为 T 上连续特征标, 且对应关系为

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^x f(x) \overline{\gamma(x)} dx.$$

$$(3) \quad L^1(\mathbb{Z}) = l^1.$$

\mathbb{Z} 是加法群, 具有离散拓扑和计数测度, 此时

$$\int_{\mathbb{Z}} |f(n)| d\mu(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(n)|.$$

乘法就是 l^1 上的卷积. 同样得到

$$\Delta(L^1(\mathbb{Z})) \longleftrightarrow \Gamma_{\mathbb{Z}}$$

即 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(n)$

其中 $\gamma(n)$ 是 \mathbb{Z} 上的连续特征标, 且对应关系为

$$\varphi(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) \overline{\gamma(n)}.$$

可以将以上结论推广到任意 $L^1(G)$ 上, 其中 G 是局部紧群, 使 $L^1(G)$ 的结构空间和 G 上的连续特征标一一对应.

2. $L^1(\mathbf{R})$ 、 $L^1(\mathbf{T})$ 、 $L^1(\mathbf{Z})$ 的Gelfand变换.

(1) $L^1(\mathbf{R})$ 的Gelfand变换.

首先将连续特征标 $\gamma(x) \in \Gamma_R$ 具体化. 任取 $\gamma(x) \in \Gamma_R$. 由 $\gamma(0) = 1$ 且 $\gamma(x)$ 连续知, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\int_0^\delta \gamma(t) dt = a \neq 0.$$

又 $\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)$, 有

$$\int_0^\delta \gamma(x+t) dt = \gamma(x) \int_0^\delta \gamma(t) dt = a\gamma(x).$$

另外,
$$\int_0^\delta \gamma(x+t) dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(s) ds,$$

所以
$$\int_x^{x+\delta} \gamma(s) ds = a\gamma(x).$$

$\gamma(t)$ 连续, 所以 $\int_x^{x+\delta} \gamma(s) ds$ 对 x 具有连续导数, 因此 $\gamma(x)$

具有连续导数. 将等式

$$\gamma(x+t) = \gamma(x)\gamma(t)$$

两边对 t 微分, 得

$$\gamma'(x+t) = \gamma(x)\gamma'(t).$$

令 $t = 0$, 得 $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x)$.

解以上微分方程, 得

$$\gamma(x) = \gamma(0)e^{\gamma'(0)x}.$$

由于 $\gamma(0) = 1$, 得

$$\gamma(x) = e^{\gamma'(0)x},$$

因为 $|\gamma(x)| = 1$, 所以 $|e^{\gamma'(0)x}| = 1$, 即 $\gamma'(0)$ 是纯虚数,

令

$$\gamma'(0) = iy, \quad y \in \mathbf{R},$$

得

$$\gamma(x) = e^{iyx}.$$

以上表明, 对于每一个连续特征标 $\gamma(x) \in \Gamma_R$ 都有一个实数 y 与之对应: $\gamma(x) \longleftrightarrow y$.

反之, 对于每个 $y \in R$, 作映射

$$x \xrightarrow{\gamma_y} e^{iyx}.$$

则 $\gamma_y \in \Gamma_R$. 事实上

$$x_1 + x_2 \longrightarrow e^{iy(x_1 + x_2)} = e^{iyx_1} e^{iyx_2},$$

即 $\gamma_y(x_1 + x_2) = \gamma_y(x_1) \gamma_y(x_2)$.

且 γ_y 连续, $|\gamma_y(x)| = |e^{iyx}| = 1$, 故 $\gamma_y \in \Gamma_R$.

综合以上讨论, 得

$$\Delta(L^1(R)) \longleftrightarrow \Gamma_R \longleftrightarrow R.$$

或 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(x): \varphi(f) = \int_R f(x) \overline{\gamma(x)} dx, f \in L^1(R).$

$$\gamma(x) \longleftrightarrow y: \gamma(x) = e^{iyx}, \quad y \in R.$$

所以 $\varphi \longleftrightarrow y: \varphi(f) = \int_R f(x) e^{-iyx} dx, f \in L^1(R). \quad (5)$

这就说明 $L^1(R)$ 的结构空间 $\Delta(L^1(R))$ 和实数 R 一一对应, 对应关系由 (5) 式给出.

再研究 Gelfand 变换 $\hat{f}: R \rightarrow C$.

若 $f \in L^1(R)$, $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. 且 $\varphi \longleftrightarrow y$, 故得

$$\hat{f}(y) = \int_R f(x) e^{-iyx} dx.$$

因此群代数 $L^1(R)$ 的结构空间就是 R 本身, 而且 Gelfand 变换就是 Fourier 变换.

(2) $L^1(T)$ 的 Gelfand 变换.

首先讨论 $\Gamma_T: \Delta(L^1(T)) \longleftrightarrow \Gamma_T$. 即 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(x)$:

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\gamma(x)} dx.$$

取 $\gamma \in \Gamma_T$, 将 Γ_T 看成加法群且按 2π 成同余, 则和以上讨论

完全相同, 必存在 $y \in \mathbf{R}$, 使得

$$\gamma(x) = e^{iyx}.$$

由于 Γ_T 按 2π 同余, 故

$$\gamma(x+2\pi) = \gamma(x).$$

即 $e^{iy(x+2\pi)} = e^{iyx}$, 所以 $y = n$, 即 $y \in \mathbf{Z}$, 得到

$$\gamma(x) = e^{inx}.$$

这就是说, 每一个连续特征标和一个整数相对应: $\gamma(x) \longleftrightarrow n$.

综上所述得

$$\Delta(L^1(T)) \longleftrightarrow \Gamma_T \longleftrightarrow \mathbf{Z},$$

即 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(x): \varphi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\gamma(x)} dx,$

$$\gamma(x) \longleftrightarrow n: \gamma(x) = e^{inx}.$$

所以 $\varphi \longleftrightarrow n: \varphi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (6)$

即 $L^1(T)$ 的结构空间和整数 \mathbf{Z} 一一对应, 其对应关系由 (4) 式给出.

再看 Gelfand 变换, $\hat{f}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$.

若 $f \in L^1(T)$, $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$. 且 $\varphi \longleftrightarrow n$, 故得

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad f \in L^1(T).$$

因此群代数 $L^1(T)$ 的结构空间就是整数 \mathbf{Z} , 而且 Gelfand 变换就是单位圆上可积函数的 Fourier 系数.

(3) $L^1(\mathbf{Z})$ 的 Gelfand 变换.

先讨论 $\Gamma_{\mathbf{Z}}$, $\Delta(L^1(\mathbf{Z})) \equiv \Delta(l^1) \longleftrightarrow \Gamma_{\mathbf{Z}}$. 即 $\varphi \longleftrightarrow \gamma(n)$:

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \overline{\gamma(n)}.$$

由 $\Gamma_{\mathbf{Z}}$ 的性质知, 若 $\gamma(1)$ 已知, 则 $\gamma(n)$ 即可求出, 又 $\gamma(1)$ 是复数, 令 $\gamma(1) = e^{i\theta}$, 则

$$\gamma(n) = e^{ina}.$$

即 $\gamma \longleftrightarrow e^{ia}$, 也就是每个连续特征标和单位圆上一点相对应, 即 $\Gamma_Z \longleftrightarrow T$. (在 § 3.7 中我们用完全不同的方法讨论 $\Delta(l^1)$, 已得到 $\Delta(l^1) \longleftrightarrow T$). 所以有

$$\Delta(L^1(\mathbf{Z})) \longleftrightarrow \Gamma_Z \longleftrightarrow T$$

即
$$\varphi \longleftrightarrow \gamma(n), \quad \varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \overline{\gamma(n)},$$

$$\gamma(n) \longleftrightarrow e^{ina}, \quad \gamma(n) = e^{ina},$$

所以
$$\varphi \longleftrightarrow e^{ia}, \quad \varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ina}. \quad (7)$$

即 $L^1(\mathbf{Z})$ 的结构空间和 T 一一对应, 对应关系由 (7) 式给出.

讨论 Gelfand 变换: $\hat{f}: T \rightarrow \mathbf{C}$.

若 $f \in L^1(\mathbf{Z})$, $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f)$.

即
$$\hat{f}(e^{ia}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-ina}.$$

因此, 群代数 $L^1(\mathbf{Z})$ 的结构空间就是 T , 而且 Gelfand 变换就是离散 Fourier 变换的逆变换.

以上 R 、 T 、 Z 都是群, 对于它们所得到的连续特征标集合 Γ_R 、 Γ_T 、 Γ_Z 在 Gelfand 拓扑下是紧的或局部紧的 Hausdorff 空间 (当群代数有单元时特征标空间是紧的, 无单元时是局部紧的).

若对于特征标集合定义加法运算

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x),$$

可以看出 Γ 也构成一个群. 以上定义是自然的, 因为 $|\gamma(x)| = 1$, $\gamma(x)$ 在 T 上. 这样 Γ 是个可交换群, 且零元素为 $\gamma(x) = 1$, 逆元素 $\gamma^{-1}(x) = \overline{\gamma(x)}$.

一般地, 对于任意一个局部紧的可交换群 G , 由 G 出发, 利用 G 上的不变测度, 作群代数 $L^1(G)$. 则 $L^1(G)$ 的极大理想空间就是特征标集合 Γ_G , 它又是拓扑空间 (Gelfand 拓扑), 同时 Γ_G 又是

群, 可以证明Gelfand拓扑和群的结构相容. 即 Γ_G 仍是一个局部紧的可交换群, 叫做 G 的特征标群.

由于 Γ_G 也是局部紧的可交换群, 自然也可以讨论 Γ_G 的特征标群 Γ_{Γ_G} . 著名的对偶定理理论指出 $\Gamma_{\Gamma_G} \cong G$ (一般情形将在第七章中给出).

例如, 我们已经得到 $\Gamma_R = R$, $\Gamma_T = Z$, $\Gamma_Z = T$. 所以

$$\Gamma_{\Gamma_R} = \Gamma_R = R,$$

$$\Gamma_{\Gamma_T} = \Gamma_Z = T,$$

$$\Gamma_{\Gamma_Z} = \Gamma_T = Z.$$

§ 3.9 向量值积分与解析函数

本节讨论在Banach空间 B 上取值的向量值函数的积分与微分. 若 X 是局部紧的Hausdorff空间, μ 是 X 上正有限的正则Borel测度. f 是 $X \rightarrow B$ 有界连续的向量值函数, 那么应如何定义积分 $\int_X f d\mu$. 自然 $\int_X f d\mu$ 应是 B 中的元素, 因此问题是如何选取 $u \in B$ 使 $u = \int_X f d\mu$.

我们知道, 若 f 是 $X \rightarrow \mathbb{C}$ 有界连续函数, 则 $\int_X f d\mu$ 就是复连续函数在 X 上的积分. 问题是如何利用复连续函数的积分概念定义向量值函数的积分.

若 φ 是 B 上的有界线性泛函, $\varphi \in B^*$, 则 $\varphi \circ f$ 是 $X \rightarrow \mathbb{C}$ 有界连续函数, 于是 $\int_X \varphi \circ f d\mu$ 成为复函数的积分, 是有确定意义的. 又由Hahn-Banach定理知, B 中的元素 u 被 B 上有界线性泛函空间 B^* 完全决定, 因此, 若知道了所有 B^* 中的有界线性泛函 φ 在 u 上的值 $\varphi(u)$, 则 u 就完全确定了. 根据以上讨论, 问题成为如何找到 B 中的元素 u , 使得对 B^* 中的一切有界线性泛函 φ 在 u 上的值,

$$\varphi(u) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

恒成立。这样的 u 若存在，则可以定义向量值函数的积分。

定义 7. 若 X 是局部紧 Hausdorff 空间， μ 是 X 上正有限的正则 Borel 测度。 B 是 Banach 空间， f 是 $X \rightarrow B$ 有界连续向量值函数。若存在一个向量 $u \in B$ ，使得

$$\varphi(u) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

对一切 $\varphi \in B^*$ 成立，则定义向量值积分 $\int_X f d\mu = u$ 。

定理 20. 若 X 是局部紧 Hausdorff 空间，具有正有限正则 Borel 测度， B 是 Banach 空间， f 是 $X \rightarrow B$ 有界连续函数，则在 B 中存在唯一元素 u ，使得对 B^* 中一切有界线性泛函 φ ，

$$\varphi(u) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

恒成立。

证 $\int_X \varphi \circ f d\mu$ 的值与 φ 的选取有关，它确定了一个 $B^* \rightarrow C$ 的映射 w ：

$$w(\varphi) = \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

显然 w 是线性的。

$$\begin{aligned} |w(\varphi)| &\leq \int_X |\varphi \circ f| d\mu \leq \int_X \|\varphi\| \|f(x)\| d\mu \\ &= \|\varphi\| \|f\| \|\mu\|, \end{aligned}$$

其中 $\|\mu\| = \mu(X)$ 。由于 φ 、 f 有界， $\mu(X)$ 是有限的。所以 w 是有界的。

为求 u ，我们设法在 B 中找到元素列 $\{u_n\}$ ，使 $\varphi(u_n)$ 逼近 $w(\varphi)$ 。 μ 是 X 上正则 Borel 测度，故任意给定 $\varepsilon > 0$ ，必可找到紧集合 $K \subset X$ ，使 $\mu(X \setminus K) < \varepsilon$ 。 K 是紧集合， f 连续，所以 $f(K)$ 也是紧集合。以 $f(K)$ 中每一点为中心， $\frac{\varepsilon}{2}$ 为半径作开球，得 $f(K)$ 的一个开覆盖，由 $f(K)$ 的紧性知，必有有限多个开球覆盖 $f(K)$ 。设以 a_1, a_2, \dots, a_n 为中心的 n 个开球覆盖 $f(K)$ 。从 a_1 为中心的开球中

去掉属于 a_1 为中心的开球的部分, 从 a_3 为中心的开球中去掉属于 a_1 或 a_2 为中心的开球的部分. 依次做下去, 即可去掉这些开球的重复部分. 得到 $f(K)$ 的有限开覆盖 V_1, V_2, \dots, V_n , 两两不相交, 且每一开集 V_i 上任意两点的距离小于 ε . 于是得到 K 上一组互不相交的非空Borel集合 A_1, A_2, \dots, A_n 满足

$$(1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = K,$$

$$(2) \text{若 } x, y \in A_i, \text{ 则 } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

从 $f(A_i)$ 中任取 b_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 则当 $x \in A_i$ 时必有

$$\|f(x) - b_i\| < \varepsilon.$$

令
$$u = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i,$$

则 $u \in B$. 任取 $\varphi \in B^*$, 考虑

$$w(\varphi) - \varphi(u) = w(\varphi) - \varphi\left(\sum_{i=1}^n \mu(A_i) b_i\right),$$

因为

$$\begin{aligned} w(\varphi) &= \int_K \varphi \circ f d\mu + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \varphi \circ f d\mu + \\ &\quad + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f d\mu, \end{aligned}$$

且 φ 为线性的, 所以

$$\begin{aligned} w(\varphi) - \varphi(u) &= \sum_{i=1}^n \left[\int_{A_i} \varphi \circ f d\mu - \varphi(\mu(A_i) b_i) \right] + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} (\varphi \circ f - \varphi(b_i)) d\mu + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \varphi(f(x) - b_i) d\mu(x) + \int_{X \setminus K} \varphi \circ f d\mu. \end{aligned}$$

$$\text{又 } |\varphi(f(x) - b_i)| \leq \|\varphi\| \|f(x) - b_i\| \leq \|\varphi\| \varepsilon, \quad \forall x \in A_i,$$

所以 $|w(\varphi) - \varphi(u)| \leq \|\varphi\| \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_{A_i} d\mu(x) +$

$$\|\varphi\| \|f\| \int_{X \setminus K} d\mu(x) = \|\varphi\| \varepsilon \mu(K) + \|\varphi\| \|f\| \mu(X \setminus K) < \|\varphi\| (\|\mu\| + \|f\|) \varepsilon.$$

由此知, 任给 $\varepsilon > 0$, 按以上方法可以找到一个 $u \in B$, 使上式成立. 又 $\|\mu\|$, $\|f\|$ 是有限的, 对于给定的整数 n , 可以取 ε , 使

$$(\|\mu\| + \|f\|) \varepsilon < \frac{1}{n}.$$

则对于 $n = 1, 2, \dots$, 必有 $u_n \in B$, 使得对一切 $\varphi \in B^*$, 不等式

$$|w(\varphi) - \varphi(u_n)| < \|\varphi\| \frac{1}{n}$$

恒成立. 因此, 对于 B^* 中的一切 φ 恒有

$$|\varphi(u_n - u_m)| = |\varphi(u_n) - \varphi(u_m)| < \|\varphi\| \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right).$$

根据Hahn-Banach定理得

$$\|u_n - u_m\| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

所以 $\{u_n\}$ 是Cauchy序列, 故存在 $u \in B$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u.$$

又 $|w(\varphi) - \varphi(u)| \leq |w(\varphi) - \varphi(u_n)| + |\varphi(u_n) - \varphi(u)|$

$$< \|\varphi\| \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{m} \right),$$

对 $n, m = 1, 2, \dots$ 恒成立. 所以 $w(\varphi) = \varphi(u)$. 即对一切 $\varphi \in B^*$, 在 B 中存在 u , 使

$$\varphi(u) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

恒成立.

u 的唯一性是显然的. 因若存在 $v \in B$ 使

$$\varphi(v) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

对一切 $\varphi \in B^*$ 成立, 则由于积分 $\int_X \varphi \circ f d\mu$ 是确定的, 故对一切 $\varphi \in B^*$, 恒有 $\varphi(u) = \varphi(v)$. 故 $u = v$, 证毕.

这个定理说明定义 7 是有确切意义的, 可以写成

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) = \int_X \varphi \circ f d\mu, \quad \forall \varphi \in B^*.$$

以上讨论中假定 μ 是正测度, 实际上若以 $M(X)$ 表示一切有界复测度空间, 取 $\mu \in M(X)$. 以上讨论仍可同样进行, 此时只需取 $\|\mu\| = |\mu|(X)$, 而

$$|\mu|(X) = \sup\{|\mu(k)| \mid k \subset X, k \text{ 是紧集}\}.$$

定理 20 可改写成如下定理.

定理 21. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, $\mu \in M(X)$ 是正则 Borel 测度, B 是 Banach 空间, f 是 $X \rightarrow B$ 有界连续函数, 则在 B 中存在唯一的元素 $\int_X f d\mu$, 使得对一切 $\varphi \in B^*$, 等式

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) = \int_X \varphi \circ f d\mu$$

恒成立, 且

$$\left\|\int_X f d\mu\right\| \leq \int_X \|f(x)\| d|\mu|(x).$$

还可以将以上向量值积分概念推广, 考虑更一般的情形. 若 f 是 $X \rightarrow B$ 有界连续映射, ψ 是 $B \rightarrow E$ 有界连续映射, E 也是 Banach 空间, 则 $\psi \circ f$ 是 $x \rightarrow E$ 有界连续函数, 根据以上讨论知 $\int_X \psi \circ f d\mu$ 存在且为 E 中的元素, $\int_X f d\mu$ 存在且为 B 中的元素, 自然 $\psi\left(\int_X f d\mu\right)$ 有意义, 那么等式

$$\int_X \psi \circ f \, d\mu = \psi \left(\int_X f \, d\mu \right)$$

是否成立？答案是肯定的。

事实上，若 $\zeta \in E^*$ ，则由定理20知

$$\zeta \left(\int_X \psi \circ f \, d\mu \right) = \int_X \zeta \circ \psi \circ f \, d\mu, \quad \forall \zeta \in E^*,$$

又 $\int_X f \, d\mu \in B$ ， $\psi \left(\int_X f \, d\mu \right) \in E$ ， $\zeta \left(\psi \int_X f \, d\mu \right) \in C$ ，且

$$\zeta \left(\psi \left(\int_X f \, d\mu \right) \right) = (\zeta \circ \psi) \int_X f \, d\mu,$$

因为 $\zeta \circ \psi \in B^*$ ，由定理20知

$$(\zeta \circ \psi) \int_X f \, d\mu = \int_X \zeta \circ \psi \circ f \, d\mu.$$

所以得

$$\zeta \left(\int_X \psi \circ f \, d\mu \right) = \zeta \left(\psi \left(\int_X f \, d\mu \right) \right),$$

即
$$\int_X \psi \circ f \, d\mu = \psi \int_X f \, d\mu.$$

特别，若 B 是一个 Banach 代数，且 $E = B$ ，若取 $\psi(y) = sy$ ，其中 $s \in B$ ，则有 $\psi \circ f = sf(x)$ ，于是得

$$\int_X s f(x) \, d\mu = s \int_X f(x) \, d\mu,$$

也就是说，向量值函数乘以 $s \in B$ 的积分，可将 s 提到积分号外。同理，若取 $\psi(y) = ys$ ，则有

$$\int_X f(x) s \, d\mu = \left(\int_X f(x) \, d\mu \right) s.$$

下面再来研究向量值函数的解析性.

定义 8 设 Ω 是复数域 \mathbf{C} 上的开集, B 是 Banach 空间. f 是 Ω 到 B 上的映射.

(1) 若对于一切 $z \in \Omega$, $\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ 存在, 则称函数 f 在 Ω 内是强解析的.

(2) 若对于一切 $A \in B^*$, Af 在 Ω 内是解析的, 则称 f 是弱解析的.

由关系式

$$\frac{Af(w) - Af(z)}{w - z} = A \left(\frac{f(w) - f(z)}{w - z} \right), \quad \forall A \in B^*$$

知, 若 f 是强解析的, 则 f 必为弱解析的, 反之如何? 有以下定理.

定理 22 若 f 在 Ω 内是弱解析的, 则 f 在 Ω 内必为强解析的.

证 首先说明若 f 在 Ω 内是弱解析的, 则 f 在 Ω 内必连续. 不妨设 $0 \in \Omega$, 只需证明 $f(z)$ 在 0 点连续.

因为 Ω 是开集, 故存在 $r > 0$ 使得

$$D_{2r} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 2r\} \subset \Omega.$$

记

$$\Gamma: |z| = 2r.$$

取定 $A \in B^*$, Af 是解析的, 由 Cauchy 积分公式知, 当 $0 < |z| < 2r$ 有

$$\frac{Af(z) - Af(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Af(\beta)}{\beta(\beta - z)} d\beta.$$

令 $M(A) = \sup\{|Af(z)| \mid z \in D_{2r}\}$, 当 $0 < |z| < r$, $\beta \in \Gamma$ 有

$$|\beta - z| \geq |\beta| - |z| \geq 2r - r = r,$$

故

$$\left| \frac{Af(z) - Af(0)}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(A)}{2r \cdot r} 4\pi r = \frac{M(A)}{r}$$

即

$$\left| A\left(\frac{f(z)-f(0)}{z}\right) \right| \leq \frac{M(A)}{r}.$$

利用Hahn-Banach定理知, $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ 作为 B^{**} 中的元素作用在 $A \in B^*$ 上是有界的, 其中 $0 < |z| < r$. 由Banach-Steinhaus定理知

$$\left\{ \left\| \frac{f(z)-f(0)}{z} \right\| \mid 0 < |z| < r \right\}$$

是一致有界的. 故有

$$\lim_{z \rightarrow 0} \|f(z) - f(0)\| = 0,$$

即

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0).$$

所以 $f(z)$ 在 $z = 0$ 是连续的. 同理可证 $f(z)$ 在任意 $z \in \Omega$ 连续.

由于 $f(z)$ 是 $C \rightarrow B$ 连续函数, Γ 是紧集合. 根据向量值积分定义有

$$\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\beta)}{\beta(\beta-z)} d\beta,$$

现在证明
$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\beta)}{\beta^2} d\beta.$$

$$\left\| \frac{f(z)-f(0)}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\beta)}{\beta^2} d\beta \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{z f(\beta)}{\beta^2(\beta-z)} d\beta \right\|$$

$$\leq \frac{|z|}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\|f\|_{\infty}}{|\beta^2| |\beta-z|} d\beta,$$

其中 $\|f\|_{\infty} = \sup_{\beta \in \Gamma} \|f(\beta)\|$, 又当 $0 < |z| < r$ 有 $|\beta - z| \geq r$.

所以

$$\left\| \frac{f(z) - f(0)}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\beta)}{\beta^2} d\beta \right\| \leq \frac{|z|}{2r^2} \|f\|_{\infty}.$$

由此知

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\beta)}{\beta^2} d\beta.$$

同理对任意 $z \in \Omega$ 可以证明 $f'(z)$ 存在. 定理得证.

再考虑如何定义 Banach 代数 A 上的向量值函数. 设 A 具有单元 e , $x \in A$, 如何去定义 $f(x)$? 若 $f(\lambda)$ 是一个具有复系数 a_k 的多项式

$$f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

自然可以定义 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = a_0 e + a_1 x + \dots + a_k x^k, \quad x \in A.$$

显然 $f(x) \in A$. 即 f 是 $A \rightarrow A$ 的向量值函数. 若

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

是 \mathbb{C} 上的整函数, 自然可以定义

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in A.$$

例如定义 $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in A.$

另外, 考虑半纯函数

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

α 是它的一个极点. 这时按以下方法定义 $f(x)$.

若 $x \in A$, 但 $\sigma(x) \not\ni \alpha$, 则 $\alpha e - x$ 可逆, 于是定义

$$f(x) = (ae - x)^{-1}.$$

自然由此可定义有理函数, 更进一步考虑如何定义一般的向量值全纯函数. 在复变函数中, Cauchy积分公式可以很好地描述解析函数, 因此我们试图利用Cauchy积分公式将一般的解析函数 $f(\lambda): \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 推广到向量值函数 $f(x): A \rightarrow A$.

定义 9 设 Ω 是 \mathbf{C} 上开集, K 是 Ω 内的紧子集, Γ 是 Ω 内有限个定向的线段, 且每个线段都不与 K 相交, 若 Γ 满足

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\lambda - z} d\lambda = \begin{cases} 1, & \text{当 } z \in K, \\ 0, & \text{当 } z \notin K, \end{cases}$$

则称 Γ 是 Ω 中环绕 K 的围道. 等式左方的积分称为点 $z \in \mathbf{C}$ 关于闭路 Γ 的指标, 记作 $\text{Ind}_{\Gamma}(z)$.

引理 1 设 A 是具有单元 e 的 Banach 代数, $x \in A$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \notin \sigma(x)$, $\Omega = \mathbf{C} - \{\alpha\}$. Γ 是 Ω 内环绕 $\sigma(x)$ 的围道, 则

$$(ae - x)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

证明 用归纳法, 先证当 $n = 0$ 时引理成立, 即证

$$e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

因为 $\sigma(x)$ 是紧集合, 且对于一切 $\mu \in \sigma(x)$ 有 $|\mu| \leq \|x\|$, 令 $r > \|x\|$, 记 Γ_r 为以 O 为中心 r 为半径的圆周, 则 $\sigma(x)$ 含于 Γ_r 所围成的圆内.

在 Γ_r 上 $\|\lambda^{-1}x\| = |\lambda^{-1}| \|x\| = \frac{\|x\|}{r} < 1$, 所以

$$(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}x)^n.$$

由此得

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1} (e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

逐项积分, 且利用关系式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \lambda^{-n-1} x^n d\lambda = \begin{cases} 0, & n \neq 0; \\ e, & n = 0, \end{cases}$$

得
$$e = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

将 Γ_r 换成 Γ , 上式仍成立. 故 $n = 0$ 时引理得证. }

又令
$$y_n = \frac{1}{2\pi i} \int_r (\alpha - \lambda)^n (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

当 $\lambda \notin \sigma(x)$, 有

$$(\lambda e - x)^{-1} = (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1},$$

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_r (\alpha - \lambda)^n (\alpha e - x)^{-1} d\lambda + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_r (\alpha - \lambda)^{n+1} (\alpha e - x)^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \end{aligned}$$

由于 $\alpha \notin \Omega$, 故 $\int_r (\alpha - \lambda)^n d\lambda = 0$. 即

$$\int_r (\alpha - \lambda)^n (\alpha e - x)^{-1} d\lambda = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_r (\alpha - \lambda)^{n+1} (\alpha e - x)^{-1} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \\ &= (\alpha e - x)^{-1} y_{n+1}, \end{aligned}$$

即 $y_{n+1} = (\alpha e - x) y_n$,

又 $y_0 = e$, 得 $y_n = (\alpha e - x)^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 引理得证.

利用这个引理知, 若 $P(\lambda)$ 是 \mathbf{C} 上的多项式, 则在 Banach 代数 A 上可以定义 $P(x)$ 如下:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_r P(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

即 $P(x)$ 由以上 Cauchy 积分公式给出.

又引理 1 对 $n < 0$ 也成立, 故若 $R(\lambda)$ 为 \mathbf{C} 上的有理函数, 具有极点 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. 开集 Ω 不包含 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, 则 $R(\lambda)$ 在 Ω 内解析, 且 $R(\lambda)$ 可表示成

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m, l} C_{m, l} (a_m - \lambda)^{-l},$$

其中 $P(\lambda)$ 是多项式. 此时可对 $R(\lambda)$ 中每一项应用引理, 从而得到以下定理.

定理 23 设

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m, l} C_{m, l} (a_m - \lambda)^{-l}$$

是有理函数, 具有极点 a_m . $P(\lambda)$ 是多项式. 若 $x \in A$, $\sigma(x)$ 不含 $R(\lambda)$ 的极点 a_m , 定义

$$R(x) = P(x) + \sum_{m, l} C_{m, l} (a_m e - x)^{-l},$$

若 Ω 是 \mathbf{C} 上的开集, 包含 $\sigma(x)$, 且在 Ω 内 R 是解析的, 若 Γ 是 Ω 内环绕 $\sigma(x)$ 的围道. 则

$$R(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

定理说明有理函数也可由 Cauchy 积分公式给出, 由此可以用 Cauchy 积分公式定义一般向量值函数.

定义 10 设 A 是 Banach 代数, 具有单元 e , Ω 是复数域 \mathbf{C} 中的开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ 是解析函数, $x \in A$, $\sigma(x) \subset \Omega$, 则定义

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

其中 Γ 是 Ω 中环绕 $\sigma(x)$ 的围道.

注意 (1) Γ 与 $\sigma(x)$ 不相交, $f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}$ 是 A 中一个连续的向量值函数, 以上定义中的积分是一个向量值积分, $\tilde{f}(x)$ 是一个

向量值函数, 也称为 A -值函数.

(2) $\tilde{f}(x)$ 与 Γ 的选取无关. 由向量值积分定义知, 任取 A 上一个有界线性泛函, 作用在定义 $\tilde{f}(x)$ 的等式两方, 则右方得一个 \mathbb{C} 上的复函数的积分, 由复函数积分的 Cauchy 定理知, 若取 Γ' 是另一个环绕 $\sigma(x)$ 且含于 Ω 内的围道, 则积分值不变.

(3) 若 $f(\lambda)$ 是多项式或有理函数, 则 $\tilde{f}(x) = f(x)$.

(4) $\tilde{f}(x)$ 的定义域是 $A_\Omega = \{x \in A \mid \sigma(x) \subset \Omega\}$.

定理 24 若 A 是有单元的 Banach 代数, Ω 是 \mathbb{C} 中开集合, 则 $A_\Omega = \{x \in A \mid \sigma(x) \subset \Omega\}$ 是 A 中的开集合.

证 为证 A_Ω 是开集, 只需证明任取 $x \in A_\Omega$, 必存在 $\delta > 0$, 使得对一切满足 $\|y\| < \delta$ 的 y , 都有 $x+y \in A_\Omega$.

因为 $\sigma(x)$ 是紧集, 故 λ 充分大时, $(\lambda e - x)^{-1}$ 存在且为 λ 的连续函数. 又 $\lambda \rightarrow \infty$ 时 $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ 趋于 0, 故存在 $M < \infty$ 使得当 $\lambda \notin \Omega$ 时,

$$\|(\lambda e - x)^{-1}\| < M.$$

取 $\delta = \frac{1}{M}$, 若 $\|y\| < \delta$, $a \notin \Omega$, 则

$$ae - (x+y) = (ae - x)\{e - (ae - x)^{-1}y\},$$

又 $\|(ae - x)^{-1}\| < M$, $\|y\| < \frac{1}{M}$, 故 $\|e - (ae - x)^{-1}y\| < 1$, 所以 $\{e - (ae - x)^{-1}y\}$ 可逆, 又 $(ae - x)$ 可逆, 所以 $\{ae - (x+y)\}$ 可逆, 即 $a \notin \sigma(x+y)$.

以上推出, 若 $a \notin \Omega$, 则 $a \notin \sigma(x+y)$. 所以若 $a \in \sigma(x+y)$, 则 $a \in \Omega$. 故 $\sigma(x+y) \subset \Omega$. 即 $x+y \in A_\Omega$. 定理得证.

我们看到, $\tilde{f}(x)$ 是 A 中开集 A_Ω 到 A 的一个映射, 它是由 \mathbb{C} 中开集合 Ω 到 \mathbb{C} 的一个函数 $f(\lambda)$ 所定义的. 又 $f(\lambda)$ 是解析函数, 自然可以研究 $\tilde{f}(x)$ 的微分和积分.

(5) 若取 $x = ae$, $a \in \Omega$, 则 $\sigma(x) = \{a\} \subset \Omega$, 于是有

$$\tilde{f}(ae) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - a)^{-1} e d\lambda = f(a)e.$$

注意到 $ae \in A_0 \iff a \in \Omega$. 若将 C 看成 A 的子集, 即将 C 看成 Ce , 则上式说明, \tilde{f} 可以看成是 f 由 Ωe 到 A_0 上的一个开拓.

若开集 $\Omega \subset C$. 引入以下记号:

$$H(\Omega) = \{f: \Omega \rightarrow C \mid f \text{ 是解析函数}\},$$

$$\tilde{H}(A_0) = \{\tilde{f} \mid f \in H(\Omega)\}.$$

$f \rightarrow \tilde{f}$ 就是 $H(\Omega)$ 到 $\tilde{H}(A_0)$ 的一个映射. 下面来证明 $f \rightarrow \tilde{f}$ 是 $H(\Omega)$ 到 $\tilde{H}(A_0)$ 上的代数同构.

定理25 若 $u(\lambda) = \lambda$, 则 $\tilde{u}(x) = x$; 若 $v(\lambda) = 1$, 则 $\tilde{v}(x) = e$.

证 由定义可知结论显然成立.

定理26 $f \rightarrow \tilde{f}$ 是 $H(\Omega)$ 到 $\tilde{H}(A_0)$ 的满射, 且为线性的一一的.

证 由 $\tilde{H}(A_0)$ 的定义, 显然 $f \rightarrow \tilde{f}$ 是 $H(\Omega)$ 到 $\tilde{H}(A_0)$ 的满射. 又因 \tilde{f} 是由积分定义的, 显然有

$$(\alpha f + \beta g) \rightarrow \alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}, \quad \alpha, \beta \in C.$$

为证明 $f \rightarrow \tilde{f}$ 是一一的, 只需证明若 $\tilde{f} = 0$, 则 $f = 0$. 若对于一切 $x \in A_0$ 有 $\tilde{f}(x) = 0$, 取 $x = ae$, 得 $\tilde{f}(ae) = f(a)e = 0$ 对一切 $a \in \Omega$ 成立, 所以 $f(a) = 0$. 即 $f = 0$.

这个定理说明 $H(\Omega)$ 和 $\tilde{H}(A_0)$ 作为线性空间, 它们是同构的.

定理27 若 $f_n \in H(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$), 且在 Ω 的紧子集上 f_n 一致地收敛于 f , 则

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x), \quad (x \in A_0).$$

证 对于 $x \in A_0$, 对于一切 $\tilde{f}_n(x)$ 选取同一个围道 Γ , 则有

$$\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (f_n(\lambda) - f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

由于 $\|(\lambda e - x)^{-1}\|$ 在 Γ 上有界, 且 $f_n(\lambda)$ 在紧集 Γ 上一致收敛于 $f(\lambda)$, 即 $|f_n(\lambda) - f(\lambda)| \rightarrow 0$ 当 $n \rightarrow \infty$, 所以

$$\|\tilde{f}_n(x) - \tilde{f}(x)\| \rightarrow 0, \text{ 当 } n \rightarrow \infty$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x).$

定理28 (Range定理) 若 Ω 是 \mathbf{C} 中开集, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ 是解析函数. 设 $A \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$, 且 A 在 $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$ 的每一个连通分支中都有一个点, 则存在有理函数 $R_n(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ 仅在 A 中有极点, 且在 Ω 紧子集上一致收敛于 f .

特别地, 若 $\mathbf{C} \cup \{\infty\} \setminus \Omega$ 是连通的, 则可取 $R_n(\lambda)$ 为多项式, 即取 $A = \{\infty\}$.

证明从略.

定理29 $\tilde{H}(A_\Omega)$ 是一个复值代数, $f \rightarrow \tilde{f}$ 是 $H(\Omega)$ 到 $\tilde{H}(A_\Omega)$ 上的代数同构.

证 由定理26知, 只需证明 $f \rightarrow \tilde{f}$ 保持乘法, 即若 $f, g \in H(\Omega)$, 则 $\tilde{fg} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$.

若 f, g 是有理函数, 则 $h = f \cdot g$ 也是有理函数, 于是 $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\tilde{g}(x) = g(x)$, $\tilde{h}(x) = h(x) (x \in A_\Omega)$. 故由 $h = fg$ 得 $\tilde{h} = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$.

对于一般情形, 若 $h = f \cdot g$, 由Runge定理知, 存在着有理函数 f_n , 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 f , 存在着有理函数 g_n , 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 g . 故 $f_n g_n$ 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 h , 且 $f_n g_n$ 为有理函数.

由定理27知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g}_n(x) = \tilde{g}(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \cdot \widetilde{g_n} = \widetilde{h}(x).$$

又
$$f_n \cdot \widetilde{g_n} = \widetilde{f_n} \cdot \widetilde{g_n},$$

所以
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{f_n}(x) \widetilde{g_n}(x) = \widetilde{h}(x).$$

即
$$\widetilde{h}(x) = \widetilde{f}(x) \widetilde{g}(x).$$

这说明 $\widetilde{H}(A_0)$ 保持乘法, 是一个复代数. 定理得证.
注意到 $H(\Omega)$ 是可交换的, 故 $\widetilde{H}(A_0)$ 也是可交换的.

定理30 设 $x \in A_0$, $f \in H(\Omega)$. 则

(1) $\widetilde{f}(x)$ 可逆当且仅当 $f(\sigma(x))$ 不包含 0 点, 即 $f(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(x)$.

(2) $\sigma(\widetilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ (称为谱映射定理).

证 (1) $\sigma(x)$ 是紧集, f 在紧集 $\sigma(x)$ 上不为零, 故 f 在包含 $\sigma(x)$ 的开集 $\Omega_1 \subset \Omega$ 上也不为零. 所以在开集 Ω_1 上, $\frac{1}{f}$ 是解析的.
由定理25知

$$\widetilde{f}(x) \cdot \widetilde{\frac{1}{f}}(x) = f \cdot \frac{1}{f}(x) = \widetilde{1}(x) = e.$$

所以 $\widetilde{f}(x)$ 是可逆的.

反之, 若有 $\alpha \in \sigma(x)$ 使 $f(\alpha) = 0$, 则存在 $g \in H(\Omega)$ 使得 $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)g(\lambda)$, 于是

$$\widetilde{f}(x) = (x - \alpha e) \widetilde{g}(x).$$

因为 $(x - \alpha e)$ 不可逆, 所以 $\widetilde{f}(x)$ 不可逆, 故若 $\widetilde{f}(x)$ 可逆, 必有 $f(\sigma(x)) \not\ni 0$.

(2) $\alpha \in \sigma(\widetilde{f}(x)) \iff \widetilde{f}(x) - \alpha e$ 不可逆 $\stackrel{\text{由(1)}}{\iff}$ 存在 $\lambda \in \sigma(x)$ 使 $f(\lambda) - \alpha = 0$, 即存在 $\alpha \in \sigma(x)$ 使 $f(\lambda) = \alpha \iff \alpha \in f(\sigma(x))$. 定理得证.

定理31 设 $x \in A_0$, $f \in H(\Omega)$, Ω_1 是包含 $f(\sigma(x))$ 的开集, $g \in H(\Omega_1)$. 又 $h(\lambda) = g(f(\lambda))$ 为由 Ω_0 到 \mathbf{C} 的映射, 其中 $\Omega_0 = \{\lambda \in \Omega \mid f(\lambda) \in \Omega_1\}$. 则 $\tilde{f}(x) \in A_{\sigma_1}$ 且 $\tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$. 即若 $h = g \circ f$, 则 $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

证 首先指出 $\tilde{h}(x)$ 是有意义的. 因为 $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$, 而 $f(\sigma(x)) \in \Omega_1$, 又 $g \in H(\Omega_1)$, 故 $\tilde{g}(\tilde{f}(x))$ 有意义.

在 Ω_1 中固定一条环绕 $\sigma(\tilde{f}(x))$ 的围道 Γ_1 , 于是有

$$\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\lambda_1) (\lambda_1 e - \tilde{f}(x))^{-1} d\lambda_1.$$

在 Ω_0 中取充分小的开集 w , 使 $\sigma(x) \subset w \subset \Omega_0$ 且 $f(w)$ 仍落在 Γ_1 以内, 即 $\text{Ind}_{\sigma_1}(f(\lambda)) = 1$ 对一切 $\lambda \in w$ 成立. 在 w 中取定一条环绕 $\sigma(x)$ 的围道 Γ_0 . 在 w 中若 $\lambda_1 \in \Gamma_1$, 则 $k(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 - f(\lambda)}$ 是解析的, 即 $1/(\lambda_1 - f(\lambda)) \in H(w)$. 故

$$\tilde{k}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} k(\lambda) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

又 $k(\lambda)(\lambda_1 - f(\lambda)) = 1$, 所以

$$\tilde{k}(x) (\lambda_1 e - \tilde{f}(x)) = e.$$

故

$$\tilde{k}(x) = (\lambda_1 e - \tilde{f}(x))^{-1}.$$

所以 $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\lambda_1) (\lambda_1 e - \tilde{f}(x))^{-1} d\lambda_1$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(\lambda_1) (\lambda_1 e - f(\lambda))^{-1} d\lambda_1 (\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} g(f(\lambda)) (\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \\
&= \tilde{h}(x).
\end{aligned}$$

定理得证.

§ 3.10 Stone-Weierstrass定理

在实函数中, 著名的Weierstrass定理指出, 区间 $[0, 1]$ 上的连续函数可以用多项式一致地逼近. 即对于 $f \in C([0, 1])$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得 $\|f - P\|_{\infty} < \varepsilon$.

Stone 利用连续函数的乘法结构, 将Weierstrass定理推广到更一般的情形.

定理32 设 X 是紧空间, $C_R(X)$ 是 X 上所有实值连续函数构成的空间, B 是 $C_R(X)$ 上的子代数, 满足

(1) B 可分离点, 即指任给 $x, y \in X$, $x \neq y$, 则存在 $g \in B$ 使得 $g(x) \neq g(y)$.

(2) B 不在任何点 $x \in X$ 消失为0, 这是说任给 $x \in X$, 存在 $g \in B$ 使 $g(x) \neq 0$.

则 $\overline{Cl}B = C_R(X)$. 其中 $\overline{Cl}B$ 表示 B 的闭包 \overline{B} .

证 证明分以下几个步骤:

1) 首先证明任给 $x, y \in X$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, 必存在 $f(t) \in B$ 使得 $f(x) = c_1$, $f(y) = c_2$.

由 B 所满足的条件(1)、(2)知, 存在 $g(t)$, $h(t)$, $k(t) \in B$, 使得 $g(x) \neq g(y)$, $h(x) \neq 0$, $k(y) \neq 0$. 令

$$u(t) = (g(t) - g(x))k(t).$$

因为 B 是子代数, 故 $u(t) \in B$. 再令

$$v(t) = (g(t) - g(y))h(t),$$

则 $v(t) \in B$. 容易看出

$$u(x) = 0, \quad u(y) \neq 0, \quad v(x) \neq 0, \quad v(y) = 0.$$

令

$$f(t) = c_1 \frac{v(t)}{v(x)} + c_2 \frac{u(t)}{u(y)},$$

则 $f(t)$ 即为所求.

2) 再证明 Weierstrass 定理的一个特例.

引理 2 若 $-1 \leq x \leq 1$, 则存在不含常数项的多项式 $P_n(x)$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|P_n(x) - |x|\|_\infty \rightarrow 0$.

$$\text{证 令 } P_0(x) = 0, \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

于是

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x)) \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2} \right). \quad (8)$$

用数学归纳法容易证明

$$0 \leq P_0(x) \leq P_1(x) \leq \dots \leq P_n(x) \leq \dots \leq |x|.$$

事实上显然 $P_0(x) \leq P_1(x) \leq |x|$. 假设 $P_n(x) \leq |x|$. 则由 $P_{n+1}(x)$ 的定义知

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2} \geq 0.$$

另外由 (8) 式知 $|x| - P_{n+1}(x) \geq 0$. 于是得

$$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|.$$

再用数学归纳法证明

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^n < \frac{2}{n+1}. \quad (9)$$

显然 $|x| - P_0(x) = |x|$. 即 $n = 0$ 时上式成立. 若

$$|x| - P_n(x) \leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2} \right)^n$$

成立. 由(8)式得

$$\begin{aligned} |x| - P_{n+1}(x) &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \\ &\leq |x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

再求函数 $|x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n$ 的极值得

$$|x| \left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n \leq \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n < \frac{2}{n+1}.$$

由(9)式知, 当 $n \rightarrow \infty$ 有

$$\|P_n(x) - |x|\|_{\infty} < \frac{2}{n+1} \rightarrow 0.$$

3) 证明若 $f \in ClB$, 则 $|f| \in ClB$.

不妨设 $\|f\|_{\infty} \leq 1$. 由2)知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 不等式 $\|P_n \circ f - |f|\|_{\infty} < \varepsilon$ 成立. 又 P_n 不含常数项, B 是子代数, 故 ClB 是子代数, $f \in ClB$, 所以 f 的多项式 $P_n \circ f \in ClB$. 由此知 $|f| \in Cl(ClB) = ClB$.

若 $\|f\|_{\infty} > 1$, 考虑 $g = \frac{f}{\|f\|_{\infty}}$, 则 $\|g\| = 1$. 由 $g \in ClB$ 得 $|f| \in ClB$.

4) 最后证明定理.

任给 $a, b \in \mathbf{R}$ 显然 $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,

$\min(a, b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$. 故若 $f, g \in ClB$. 则

$$\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in ClB,$$

$$\min(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in ClB.$$

即 ClB 按实数的序作成一格.

给定 $f \in C_R(X)$, 任给 $\varepsilon > 0$, 取定一个 $x \in X$, 任取 $y \in X$, 由于 $f(x), f(y) \in \mathbf{R}$, 利用 1° 中结论知, 存在一个 $g_y(t) \in ClB$, 使得 $g_y(x) = f(x)$, $g_y(y) = f(y)$.

又 $g_y - f$ 是连续函数, 且 $(g_y - f)(y) = 0$. 故存在包含 y 的开集 U_y , 使得在 U_y 上有 $g_y > f - \varepsilon$. 对于每个 $y \in X$, 可以得到具有以上性质的开集 $U_y \ni y$. 故 $\{U_y\}$ 形成 X 的一个开覆盖. 又 X 是紧集, 所以存在 $y_1, y_2, \dots, y_n \in X$, 使得

$$U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_n} = X.$$

令 $h_x = \max\{g_{y_1}, \dots, g_{y_n}\}$, 则 $h_x \in ClB$. 显然在 x 点 $h_x(x) = f(x)$, 且 $h_x > f - \varepsilon$ 在 X 上恒成立. 这是因为任取 $t \in X$, 则有某个 i , 使 $t \in U_{y_i}$, 所以 $g_{y_i}(t) > f(t) - \varepsilon$. 故 $h_x(t) \geq g_{y_i}(t) > f(t) - \varepsilon$.

再变动 $x \in X$. 由于 $h_x - f$ 是连续函数, 且 $(h_x - f)(x) = 0$, 故存在一个开集 V_x 包含 x , 使得在 V_x 上, $h_x < f + \varepsilon$ 成立. $\{V_x\}$ 形成 X 的一个开覆盖, 故存在 $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ 使得

$$U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_m} = X.$$

令 $k = \min\{h_{x_1}, h_{x_2}, \dots, h_{x_m}\}$, 则 $k \in ClB$. 且 $k < f + \varepsilon$. 又由于每个 h_{x_i} 满足 $h_{x_i} > f - \varepsilon$, 所以 $k > f - \varepsilon$. 由此得到

$$\|f - k\|_\infty < \varepsilon.$$

所以 $f \in Cl(ClB) = ClB$. 故得

$$C_R(X) = ClB.$$

定理33 (Stone-Weierstrass定理). 设 X 是紧空间, $C(X)$ 是 X 上连续函数空间, B 是 $C(X)$ 的一个子代数, 满足

- (1) B 可分离点.
- (2) B 不在任何点消失为零.
- (3) B 是自共轭的, 即若 $f \in B$, 则 $\overline{f} \in B$.

则 $ClB = C(X)$.

证 任取 $f \in B$, 由 $f = u + iv$ 知

$$u = \frac{f + \overline{f}}{2} \in B, \quad v = \frac{f - \overline{f}}{2i} \in B,$$

u, v 为实值连续函数, 现在证明 u, v 的集合构成 $C_R(X)$ 的子代数, 且满足条件 (1) 和 (2).

由于 B 满足条件 (1), 故任给 $x, y \in X$, 存在 $f \in B$ 使得 $f(x) = 1, f(y) = 0$, 即 $u(x) = 1, u(y) = 0$, 这就是说集合 $\{u | u = \operatorname{Re} f, f \in B\}$ 中存在着 u 使 $u(x) \neq u(y)$, 即分离点.

B 满足条件 (2). 任给 $x \in X$, 存在 $f \in B$ 使 $f(x) \neq 0$. 我们可适当选取 $\alpha \in \mathbf{C}$ 使 $\alpha f(x) > 0$. 又 $\alpha f = u_1 + iv_1$, 故 $u_1(x) = \alpha f(x) \neq 0$.

以上证明了集合 $\{u | u = \operatorname{Re} f, f \in B\}$ 作成 $C_R(X)$ 的一个子代数满足条件 (1)、(2), 由定理 32 知

$$Cl_{C_R(X)} \{u | u = \operatorname{Re} f, f \in B\} = C_R(X).$$

同理有

$$Cl_{C_R(X)} \{v | v = \operatorname{Im} f, f \in B\} = C_R(X).$$

所以

$$ClB = C(X).$$

证毕.

例 $X = T$ 是紧集, 考虑连续函数空间 $C(T)$,

$$\text{令 } B = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\theta} \mid \theta \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

B 是一个子代数, 但显然 $ClB \neq C(T)$. 这是因为 B 不满足定理 33 中的条件 (3). 若取

$$B = \left\{ \sum_{n=-k}^{\infty} C_n e^{in\theta} \mid \theta \in \mathbf{R}, k = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

则 B 是满足定理 33 中条件 (1)、(2)、(3) 的子代数, 故 $ClB = C(T)$.

很明显, 实函数的 Weierstrass 定理是 Stone-Weierstrass 定理的一个特殊情形; 因为所有多项式的集合, 自然是 $C_R(X)$ 的一个子代数且满足定理 33 中的条件 (1)、(2).

第四章 Hilbert空间与 B^* -代数

在赋范线性空间中,范数相当于向量的模,若再引入内积概念—相当于向量的夹角概念,则可以研究向量的正交和投影概念.引入了内积的线性空间称为内积空间,完备的内积空间称为Hilbert空间.本章讨论Hilbert空间及其上的线性算子,由此引出对合概念.具有对合的Banach代数, B^* -代数有着许多重要特性.例如它的谱理论,Gelfand理论.本章讨论了它们的重要性质,证明了 B^* -代数就是某个Hilbert空间上有界线性算子的闭 $*$ -子代数.

§ 4.1 Hilbert空间的定义和性质

定义 1 若 H 是复数域 \mathbf{C} 上的线性空间,如果对于 H 中的任何两个向量 x, y ,都对应一个数 $(x, y) \in \mathbf{C}$,也就是映射 $H \times H \rightarrow \mathbf{C}$,满足

$$(1) (x, y) = \overline{(y, x)}, \quad \forall x, y \in H,$$

$$(2) (x+y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \forall x, y, z \in H,$$

$$(3) (\alpha x, y) = \alpha(x, y), \quad \alpha \in \mathbf{C}, x, y \in H,$$

$$(4) (x, x) \geq 0, \quad \forall x \in H,$$

$$(5) (x, x) = 0, \quad \text{则 } x = 0.$$

则称 (x, y) 为 H 中的内积,若只满足(1)→(4),则称 (x, y) 为半内积.

由以上定义容易得出:

$$(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha} \overline{(y, x)} = \overline{\alpha} (x, y).$$

$$(x, y+z) = \overline{(y+z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z).$$

$$(0, y) = 0, \quad \forall y \in H.$$

由

$$\begin{cases} (x+y, z) = (x, z) + (y, z), \\ (\alpha x, z) = \alpha(x, z) \end{cases}$$

说明映射 $x \rightarrow (x, z)$ 是线性的, 而由

$$\begin{cases} (x, y+z) = (x, y) + (x, z), \\ (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) \end{cases}$$

知映射 $y \rightarrow (x, y)$ 是共轭线性的。

当线性空间 H 上定义了内积, 则称 H 为内积空间。若用内积定义范数

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

则 H 又是一个赋范线性空间。自然要证明由 (1) 式定义的 $\|x\|$ 确实满足范数的条件, 为此先证明一个不等式

$$|(x, y)| \leq (x, x)(y, y), \quad (2)$$

称为 Schwarz 不等式。事实上, 对于任何数 λ 有

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2(y, y) \\ &= (x, x) + 2\operatorname{Re}\overline{\lambda}(x, y) + |\lambda|^2(y, y) \end{aligned}$$

当 $y=0$, 显然 (2) 式成立, 故不妨设 $y \neq 0$, 取 $\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$ 得

$$(x, x) - 2\frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y) \geq 0.$$

即得 (2) 式。

现只验证 (1) 式满足范数的三角不等式。因范数的其它要求可以由内积的性质直接得出。

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2.$$

由 Schwarz 不等式

$$|\operatorname{Re}(x, y)| \leq |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

代入上式得

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

所以 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

下面我们总是在内积空间 H 中引入由 (1) 式定义的范数, 使 H 成为一个赋范线性空间, 也就是距离空间. 于是可以按此范数讨论 H 中的极限、收敛等概念

定义 2 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

定理 1 Hilbert 空间 H 中的任何两个元素 x, y 必满足平行四边形公式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (3)$$

证 $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2$,

$$\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2,$$

二式相加即得所证.

这个定理表明, 一个 Hilbert 空间作为 Banach 空间, 它的范数满足平行四边形公式. 反之, 并不是任何 Banach 空间都能引入内积使之成为 Hilbert 空间. 有以下定理.

定理 2 若 Banach 空间 B 中的任何两个元素满足平行四边形公式 (3), 则必可在 B 中定义内积, 使 B 成为 Hilbert 空间.

证 在 Banach 空间 B 中, 对 $x, y \in B$, 令

$$\begin{aligned}(x, y) &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 \\ &\quad - i\|x-iy\|^2),\end{aligned} \quad (4)$$

可以验证这样定义的 (x, y) 满足内积的五个条件 (读者自证). 由这个内积定义范数 $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. 显然有 $\|x\| = \|x\|$. 即由内积引出的范数就是原来的范数.

所以 B 是一个 Hilbert 空间. (4) 称为极化公式.

利用定理 1 和定理 2 又可以给出 Hilbert 空间的另一种定义.

定义 3 若 H 是 Banach 空间且满足平行四边形定律

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in H$$

则称 H 是 Hilbert 空间。

例 1 n 维复空间 C^n : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 定义内积

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}, \quad x, y \in C^n$$

容易验证 (x, y) 满足内积的条件, 故 C^n 为一个内积空间, 且显然是完备的。因此 C^n 是一个 Hilbert 空间。

例 2 在 $L^2(X, \mu)$ 空间中, 定义内积

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(X, \mu).$$

那末, $L^2(X, \mu)$ 是一个 Hilbert 空间。

例 1 实际上是例 2 的特殊情形。取

$$X = \{1, 2, \dots, n\},$$

且取 μ 为计数测度, 则

$$\int_X f d\mu = f(1) + f(2) + \dots + f(n).$$

于是

$$L^2(X, \mu) = \left\{ f: X \rightarrow C \mid \sum_{j=1}^n |f(j)|^2 < \infty \right\}$$

$$(f, g) = \int_X f(x) \overline{g(x)} dx = \sum_{j=1}^n f(j) \overline{g(j)}.$$

例 3 在 $C([0, 1])$ 中定义内积

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt,$$

则 $C([0, 1])$ 是一个内积空间, 但不是 Hilbert 空间。因为 $C([0, 1])$ 不完备, 它在 L^2 中稠密。

定理 3 设 H 是 Hilbert 空间, C 是 H 中的非空闭凸集, 则存在唯一的 $x_0 \in C$, 使得

$$\|x_0\| \leq \|x\|$$

对一切 $x \in C$ 成立。

证 令 $\delta = \inf\{\|x\| \mid x \in C\}$, 则存在 $\{x_n\} \in C$ 使得 $\|x_n\| \rightarrow \delta$.
下面证明 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列.

在平行四边形公式

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

中取 $x = x_n$, $y = x_m$. 由于 C 是闭凸集, 故 $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$.

于是 $\|x_n + x_m\|^2 > 4\delta^2$. 又

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 \rightarrow 4\delta^2$$

所以 $\|x_n - x_m\|^2 \rightarrow 0$.

即 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列, 由于 C 是闭集, 所以存在 $x_0 \in C$, 使得 $x_n \rightarrow x_0$. 故

$$\|x_0\| \leq \delta.$$

再证明 x_0 的唯一性, 从上面的证明看到, 只要 x_n 的范数满足 $\|x_n\| \rightarrow \delta$, 则 $\{x_n\}$ 必是 Cauchy 序列.

若 $y_0 \in C$, 且 $\|y_0\| = \delta$, 则 $\{x_0, y_0, x_0, y_0, \dots\}$ 必是 Cauchy 序列, 从而必收敛. 所以 $x_0 = y_0$. 证毕.

这个定理说明, Hilbert 空间的非空闭凸集 C 中, 有唯一点 x_0 , 它到原点的距离最近.

§ 4.2 Hilbert 空间的直交分解

定义 4 设 H 是内积空间, $x, y \in H$, 若 $(x, y) = 0$, 则称 x 与 y 直交, 记作 $x \perp y$.

记 $x^\perp = \{y \in H \mid x \perp y\}$, 则 x^\perp 是 H 的闭线性子空间.

事实上, 若 $y, z \in x^\perp$, 即 $(y, x) = 0$, $(z, x) = 0$, 则立即可得 $(y+z, x) = 0$. 所以 $y+z \in x^\perp$. 又由 $y \in x^\perp$ 得 $(\alpha y, x) =$

$a(y, x) = 0$, 故 $ay \in x^\perp$. 这说明 x^\perp 是一个线性子空间. 又若 $y_n \in x^\perp$ 且 $y_n \rightarrow y$, 那末由内积的连续性, 得

$$(y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, x) = 0,$$

所以 $y \in x^\perp$. 因此 x^\perp 是 H 的闭线性子空间.

若 M 是内积空间 H 的子集, 记

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp,$$

即 $y \in M^\perp \iff y \perp x, \forall x \in M$.

由于 x^\perp 是 H 的闭线性子空间, M^\perp 是这些闭子空间的交, 故 M^\perp 仍为闭子空间. 即有以下定理.

定理 4 设 H 是内积空间, $M \subset H$, 那么 M^\perp 是 H 的闭线性子空间.

下面证明 Hilbert 空间的直交分解定理.

定理 5 设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间, 则 H 的任一元素 x 可以唯一地表示为

$$x = Px + Qx,$$

其中 $Px \in M$, $Qx \in M^\perp$, 且 $\|Qx\| \leq \|y + x\|$, $\forall y \in M$.

证 令 $\delta = \inf\{\|y + x\| \mid y \in M\}$,

由题设 M 是 H 的闭子空间, 故 M 是非空闭凸集, 所以 $x + M = \{x + y \mid y \in M\}$ 也是非空闭凸集, 由定理 3 知, 存在唯一的 $x_0 \in x + M$, 使得 $\|x_0\| = \delta$. 令

$$y_0 = x - x_0,$$

则 $y_0 \in M$, 即 $x = x_0 + y_0$.

下面证明 $x_0 \in M^\perp$. 任取 $y \in M$, $y \neq 0$, 不妨设 $\|y\| = 1$. 因为

$$x_0 + \alpha y \in x + M, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

根据定理 3 有

$$\delta = \|x_0\| \leq \|x_0 + \alpha y\|.$$

又对一切 $\alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\|x_0 + \alpha y\|^2 &= (x_0 + \alpha y, x_0 + \alpha y) = \|x_0\|^2 + \alpha(y, x_0) \\ &\quad + \bar{\alpha}(x_0, y) + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq \|x_0\|^2,\end{aligned}$$

则有 $\alpha(y, x_0) + \bar{\alpha}(x_0, y) + |\alpha|^2 \|y\|^2 \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

取 $\alpha = -(x_0, y)$, 代入上式得

$$-|(x_0, y)|^2 - |(x_0, y)|^2 + |(x_0, y)|^2 \geq 0,$$

即 $-|(x_0, y)|^2 \geq 0$.

所以 $(x_0, y) = 0$.

由于 y 是 M 的任一元素, 所以 $x_0 \in M^\perp$. 至此证明了

$$x = Px + Qx,$$

其中 $Px \in M$, $Qx \in M^\perp$, 且 $\|Qx\| \leq \|y + x\|, \forall y \in M$.

还需证明以上表示式的唯一性. 为此, 首先证明

$$M \cap M^\perp = \{0\}.$$

事实上, 若 $z \in M \cap M^\perp$, 则 $z \in M, z \in M^\perp$, 故 $(z, z) = 0$, 所以 $z = 0$.

若 $x = Px + Qx$, 且 $x = w_1 + w_2$, 其中 $w_1 \in M, w_2 \in M^\perp$.

则 $Px - w_1 = w_2 - Qx$.

由于 $Px - w_1 \in M, w_2 - Qx \in M^\perp$, 故必有

$$Px - w_1 = 0, w_2 - Qx = 0.$$

即 $w_1 = Px, w_2 = Qx$. 这就证明了上述直交分解是唯一的. 定理得证.

这个定理说明, 对于 Hilbert 空间 H , 若 M 为其闭子空间, 则 H 可写成 M 与 M^\perp 的直和:

$$H = M \oplus M^\perp,$$

称 M^\perp 为 M 的正交补空间.

显然, 若 $M \neq H$, 则由 $H = M \oplus M^\perp$ 知, $M^\perp \neq \{0\}$. 另外, 若 M 是 H 的闭子空间, 则 $(M^\perp)^\perp = M$.

事实上, $(M^\perp)^\perp$ 表示所有与 M^\perp 直交的向量, 故 $M \subset (M^\perp)^\perp$. 另

一方面

$$M \oplus M^\perp = H = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp,$$

所以 $(M^\perp)^\perp = M$.

自然还可以研究算子:

$$\begin{aligned} P: \quad H &\rightarrow M, \\ x &\rightarrow Px. \end{aligned}$$

称 P 为 H 射影于闭子空间 M 的射影算子, 则显然有以下性质:

(1) P 是线性算子.

(2) P 是幂等算子, $P^2 = P$.

同理可考虑算子 Q , 也具有同样的性质.

§ 4.3 Hilbert空间的同构

为研究Hilbert空间的同构性, 先引入标准正交系的概念, 它是数学分析中正交函数系概念的推广.

定义5 设 H 是Hilbert空间, 若 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset H$ 满足

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 为 H 中的一个标准正交集合.

若 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 是 H 中的标准正交集合, $x \in H$ 且 $x =$

$\sum_{j=1}^k a_j u_j$, 则容易得出 $a_j = (x, u_j)$, 于是有

$$x = \sum_{j=1}^k (x, u_j) u_j.$$

$$\text{且} \quad \|x\|^2 = \sum_{j=1}^k |(x, u_j)|^2. \quad (5)$$

特别地, $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 必是线性无关的. 事实上, 若

$\sum_{j=1}^k a_j u_j = 0$, 则由(5)式, 令 $x = 0$ 得

$$0 = \sum_{j=1}^k |(x, u_j)|^2 = \sum_{j=1}^k a_j^2,$$

所以 $a_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$. 即 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 线性无关.

若 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\} \subset H$ 且为线性无关的, 考虑由 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 张成的空间, 记作 $M = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, 即

$$M = \left\{ \sum_{j=1}^k a_j u_j \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbf{C} \right\}.$$

任给 $x \in H$, 研究 x 到子空间 M 的距离. 可以证明 M 是 H 的闭子空间 (读者自证).

由定理 3 知, 存在 $x_0 \in M$, 使得

$$\|x - x_0\| = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j u_j \right\| \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbf{C} \right\} = \delta.$$

现在来确定 x_0 . $x_0 \in M$, 故 x_0 可写成 $x_0 = \sum_{j=1}^k c_j u_j$, 又由 Hilbert 空间的直交分解定理知 $x - x_0 \in M^\perp$, 所以

$$(x - x_0, u_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

即 $(x_0, u_i) = (x, u_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. 将 $x_0 = \sum_{j=1}^k c_j u_j$ 代入, 得方程组.

$$\sum_{j=1}^k (u_j, u_i) c_j = (x, u_i),$$

由此可确定 c_j , 从而得 x_0 . 且由 $x - x_0 \in M^\perp$, 得

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \|x - x_0\|^2 = (x - x_0, x - x_0) = \|x\|^2 - (x, x_0) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k \overline{c_j} (x, u_j). \end{aligned}$$

特别地, 若 $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ 是 H 的标准正交集合, 则得

$$c_i = (x, u_i),$$

$$\begin{aligned} \text{且 } \delta^2 &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k \overline{(x, u_j)}(x, u_j) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{j=1}^k |(x, u_j)|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

一般地, 考虑 H 中无穷标准正交集合 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$, 这是指 $(u_\alpha, u_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in A$. 另外, 我们说无穷集合 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 是线性无关的, 是指集合中任意有限个元素都是线性无关的.

若 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 是Hilbert空间 H 中的一组标准正交集合, 则由上面的讨论知, 对于 A 中任一有限子集 F , 利用(6)式得

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in F} |(x, u_\alpha)|^2, \quad \forall x \in H. \quad (7)$$

下面给出无限和 $\sum_{\alpha \in A}$ 的意义.

定义 6 若 φ 是 $A \rightarrow [0, \infty]$ 的函数, 则定义 $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ 如下:

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sup \left\{ \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) \mid F \text{ 是 } A \text{ 的有限子集} \right\}.$$

由以上定义看出, 若 φ 在某个点 α 为无穷大, 则 $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ 一定是无穷的. 若 $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ 是有限的, 则最多只能有可数个 α , 使 $\varphi(\alpha) \neq 0$.

按以上无穷和的定义, 由不等式(7)得

$$\sum_{\alpha \in A} |(x, u_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (8)$$

称(8)式为Bessel不等式. 记 $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$, $\hat{x}(\alpha)$ 称为 x 关于标准正交集 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 的Fourier系数. Bessel不等式写成

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (8')$$

若在 A 中引入计数测度 μ , 则 A 中的每个子集合都可测, 且任意的 $\varphi: A \rightarrow [0, \infty]$ 都是可测函数, 于是

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \int_A \varphi d\mu.$$

事实上 $\varphi \geq 0$ 可测, 则有简单函数 $S_n \leq \varphi$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \varphi$. 又

$$S_n = a_1 \chi_{A_1} + a_2 \chi_{A_2} + \cdots + a_k \chi_{A_k},$$

其中 A_1, A_2, \dots, A_k 互不相交, χ_{A_i} 为 A_i 上的特征函数.

$$\text{由于 } \int_A S_n d\mu = a_1 \mu(A_1) + a_2 \mu(A_2) + \cdots + a_k \mu(A_k),$$

$$\text{且 } \int_A \varphi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A S_n d\mu,$$

$$\text{故有 } \int_A \varphi d\mu = \sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha),$$

此时(8')式可写成

$$\int_A |\hat{x}(\alpha)|^2 d\mu \leq \|x\|^2,$$

即Bessel不等式表明, 对任何 $x \in H$, \hat{x} 是指标集 A 到复数域 C 上的函数

$$\hat{x}: A \rightarrow C, \text{ 即 } \alpha \rightarrow \hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha).$$

\hat{x} 是属于 $L^2(A, \mu)$ 的. 又 μ 是 A 上的计数测度, $L^2(A, \mu) = l^2(A)$, 即Hilbert空间的元素 x , 其Fourier系数 \hat{x} 是 l^2 中的元素. 这样得到一个映射 $F: H \rightarrow l^2(A)$. 即 $x \rightarrow \hat{x}$. 显然 F 是线性的.

$$\begin{aligned} F(x+y) &= (x+y)^\wedge(\alpha) = (x+y, u_\alpha) \\ &= (x, u_\alpha) + (y, u_\alpha) = \hat{x}(\alpha) + \hat{y}(\alpha) \\ &= F(x) + F(y), \end{aligned}$$

$$F(\lambda x) = \hat{\lambda x}(\alpha) = (\lambda x, u_\alpha) = \lambda(x, u_\alpha) = \lambda \hat{x}(\alpha) = \lambda F(x)$$

而且 F 是有界的 $\|F\| \leq 1$ (Bessel不等式)。

定理 6 (Riesz-Fischer定理) 设 H 是 Hilbert 空间, $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 H 中一组标准正交系, 则对于任意一个 $l^2(A)$ 中的函数 φ , 都存在着 H 中的一个元素 x , 使得 x 关于 $\{u_\alpha\}$ 的 Fourier 系数 \hat{x} 等于 φ : $\hat{x} = \varphi$. 换言之, 映射 $F: x \rightarrow \hat{x}$ 是 H 到 $l^2(A)$ 上的映射。

证 令 $A_n = \left\{ \alpha \in A \mid |\varphi(\alpha)| > \frac{1}{n} \right\}, n=1, 2, \dots$. 则

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

由于 $\sum_\alpha |\varphi(\alpha)|^2 < \infty$, 每个 $A_n (n=1, 2, \dots)$ 都是有限的。

$$\text{令 } x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha, \quad n=1, 2, \dots,$$

考虑 x_n 的 Fourier 系数:

$$\hat{x}_n(\alpha) = (x_n, u_\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha), & \text{当 } \alpha \in A_n, \\ 0, & \text{当 } \alpha \notin A_n. \end{cases}$$

所以 $\hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha) \chi_{A_n}$,

其中 χ_{A_n} 为 A_n 的特征函数, 且

$$|\hat{x}_n - \varphi|^2 = |\varphi \chi_{A_n} - \varphi|^2 \leq |\varphi|^2,$$

又对一切 α , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\hat{x}_n(\alpha) \rightarrow \varphi(\alpha)$. 由控制收敛定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{x}_n - \varphi\|^2 = 0,$$

所以 $\{\hat{x}_n\}$ 是 $l^2(A)$ 中的 Cauchy 列, 因为 A_n 是有限的,

$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha$ 是有限多个 u_α 的线性组合, 所以由(5)式知

$$\|x_n\|^2 = \sum_{\alpha \in A_n} |(x_n, u_\alpha)|^2,$$

故 $\|x_n - x_m\| = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|_2$.

这表明 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 又 H 是完备的, 所以存在 $x \in H$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

所以对于一切 $\alpha \in A$ 有

$$\begin{aligned} \hat{x}(\alpha) &= (x, u_\alpha) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, u_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, u_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_n(\alpha) \\ &= \varphi(\alpha). \end{aligned}$$

定理证毕.

以上讨论说明 F 是 H 到 $l^2(A)$ 上的有界线性映射, 且 $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$, 若等式 $\|\hat{x}\| = \|x\|$ 成立, 则可以将 H 与 $l^2(A)$ 等同起来. 不等式 $\|\hat{x}\| < \|x\|$ 成立说明标准正交集 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 还不够大.

下面的定理证实了这个事实.

定理 7 设 H 是 Hilbert 空间, 以下四个命题是等价的.

(1) $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 H 的极大标准正交集, 即不存在不等于 H 的标准正交集可以包含它. 此时称 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 是完备的.

(2) $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 在 H 中是稠密的.

$$(3) \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2, \quad \forall x \in H.$$

$$(4) (x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)}, \quad \forall x, y \in H. \text{ (Parseval 等式)}$$

证 (1) \Rightarrow (2).

用反证法, 若 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 的闭包记为 M , 且 $M \neq H$, 则 $M^\perp \neq 0$.

即存在 $u \neq 0, u \in M^\perp$. 于是 $\{u_\alpha | \alpha \in A\} \cup \left\{ \frac{u}{\|u\|} \right\}$ 仍是一个标准正交集, 显然它包含了 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 此与 (1) 矛盾. 故 $M=H$, (2) 得证.

(2) \Rightarrow (3).

任给 $x \in H$, 由于 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 在 H 中稠密, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_k}$ 及 $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{C}$ 使得

$$\left\| x - \sum_{j=1}^k c_j u_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon.$$

若记 $M_1 = \left\{ \sum_{j=1}^k c_j u_{\alpha_j} \mid c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{C} \right\}$, 则 x 到子空间

M_1 的距离, 即 $\left\| x - \sum_{j=1}^k c_j u_{\alpha_j} \right\|$ 的下确界在点 $x_0 = \sum_{j=1}^k (x, u_{\alpha_j}) u_{\alpha_j}$

处达到, 即

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{j=1}^k (x, u_{\alpha_j}) u_{\alpha_j} \right\| &= \left\| x - \sum_{j=1}^k \hat{x}(\alpha_j) u_{\alpha_j} \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{j=1}^k c_j u_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $\|x\| - \varepsilon \leq \left\| \sum_{j=1}^k \hat{x}(\alpha_j) u_{\alpha_j} \right\|$,

$$\begin{aligned} (\|x\| - \varepsilon)^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^k \hat{x}(\alpha_j) u_{\alpha_j}, \sum_{j=1}^k \hat{x}(\alpha_j) u_{\alpha_j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (\hat{x}(\alpha_j))^2 \leq \sum_{\alpha \in A} (\hat{x}(\alpha))^2 = \|\hat{x}\|_2^2. \end{aligned}$$

由此得

$$\|x\| \leq \|\hat{x}\|_2,$$

又由 Bessel 不等式知 $\|\hat{x}\|_2 \leq \|x\|$, 所以

$$\|x\|^2 = \|\hat{x}\|_2^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

(3) \Rightarrow (4)

(x, y) 是 H 中的内积, $\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \overline{\hat{y}(\alpha)} = (\hat{x}, \hat{y})$ 是 l^2 中的内

积, 现证明它们相等.

$$\begin{aligned} \text{由(3)知, } (x + \lambda y, x + \lambda y) &= (\hat{x} + \lambda \hat{y}, \hat{x} + \lambda \hat{y}) \\ &= (\hat{x} + \lambda \hat{y}, \hat{x} + \lambda \hat{y}), \end{aligned}$$

$$\text{即 } \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) = \lambda(\hat{y}, \hat{x}) + \overline{\lambda}(\hat{x}, \hat{y}),$$

取 $\lambda = 1$, 得 $\operatorname{Re}(x, y) = \operatorname{Re}(\hat{x}, \hat{y})$. 取 $\lambda = i$, 得 $\operatorname{Im}(x, y) = \operatorname{Im}(\hat{x}, \hat{y})$. 所以 $(x, y) = (\hat{x}, \hat{y})$. (4) 得证.

(4) \Rightarrow (1)

用反证法, 若 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 不是 H 中极大标准正交集, 则存在 $u \neq 0, u \in H$, 使得 $u \perp u_\alpha, \forall \alpha \in A$. 则由(4)知 $(u, u) = (\hat{u}, \hat{u})$.

因 $u \neq 0$, 所以 $(u, u) \neq 0$. 又 $\hat{u}(\alpha) = (u, u_\alpha) = 0$, 所以 $(\hat{u}, \hat{u}) = \sum_{\alpha} |\hat{u}(\alpha)|^2 = 0$ 得出矛盾. 故(1)成立. 定理得证.

利用 Zorn 引理可以得到以下定理.

定理 8 每一个 Hilbert 空间 H , 一定存在着一个极大的标准正交集, 称为 H 的完备标准正交系.

综合以上定理知, 若 $\{u_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 Hilbert 空间 H 的完备标准正交系, 则对于 H 内的任一元素 x , 必有 $l^2(A)$ 中一个元素 \hat{x} (\hat{x} 关于 $\{u_\alpha\}$ 的 Fourier 系数) 与之对应, 反之由 Riesz-Fischer 定理知, 任给 $l^2(A)$ 中一个元素 φ , 必有 H 中的一个元素 x , 其 Fourier 系数 \hat{x} 等于 φ . 若以 F 表示 H 到 $l^2(A)$ 的映射, 则 F 是映上的, 一一的, 且保持内积. 显然 F 为有界线性映射. 即有以下定理.

定理 9 每一个 Hilbert 空间 H 都与某个 $l^2(A)$ 空间等距同构.

记作 $H \cong l^2(A)$.

可以证明Hilbert空间 H 的完备标准正交系的基数是可数的, 即 A 是可数集合. 此时称 H 是可分的.

例 若 $H = L^2(T)$. 令 $u_n(t) = e^{in t}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 则 $\{u_n | n \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(T)$ 的完备标准正交系.

证 $\{u_n | n \in \mathbf{Z}\}$ 是标准正交集是显然的. 事实上,

$$(u_m, u_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im t} e^{-in t} dt = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n, \\ 1, & \text{当 } m = n. \end{cases}$$

为证明其完备性, 由定理 7 中 (2) 知, 只需证明 $\{u_n\}$ 在 $L^2(T)$ 中稠密. 因为三角多项式在 $C(T)$ 中 (按 $C(T)$ 的范数) 是稠密的. 即若 $g \in C(T)$, 则有三角多项式 p , 使得 $\|g - p\|_{\infty} < \varepsilon$. 又

$$\begin{aligned} \|g\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|g\|_{\infty}^2 dt \right)^{1/2} = \|g\|_{\infty}. \end{aligned}$$

故 $g \in L^2(T)$ 且 $\|g - p\|_2 \leq \|g - p\|_{\infty} < \varepsilon$. 所以 p 在 L^2 意义下逼近 g . 又 $C(T)$ 在 $L^2(T)$ 中是稠密的, 故三角多项式在 $L^2(T)$ 中是稠密的. 所以 $\{e^{in t} | n \in \mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(T)$ 中的完备标准正交系.

任给 $f \in L^2(T)$, 则

$$(f, u_n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in t} dt,$$

即为 f 的 Fourier 系数. 此时对于 $A = \mathbf{Z}$, 即 $l^2(\mathbf{Z})$ 有古典的 Riesz-Fischer 定理.

定理 6' (Riesz-Fischer 定理) 若 $C_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$, 且

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 < \infty, \text{ 则存在 } f \in L^2(T) \text{ 使得 } \hat{f}(n) = C_n, \quad \text{即}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-in t} dt = C_n.$$

§ 4.4 Hilbert空间的自共轭性

本节讨论Hilbert空间 H 上的有界线性泛函, 即研究 H 的共轭空间 H^* . 可以证明共轭空间 H^* 和 H 是等价的, 这就是Hilbert空间的自共轭性.

定理10 若 φ 是Hilbert空间 H 上的有界线性泛函, 则在 H 中存在唯一的元素 y , 使得对每一个 $x \in H$, 有 $\varphi(x) = (x, y)$, 且 $\|\varphi\| = \|y\|$.

证 若 φ 是 H 上的零泛函, 即对一切 $x \in H$ 有 $\varphi(x) = 0$, 则 $y = 0$.

若 φ 是非零有界线性泛函, 记 φ 的零空间为 $N(\varphi)$:

$$N(\varphi) = \{x \in H \mid \varphi(x) = 0\},$$

则 $N(\varphi)$ 是 H 的真闭子空间. 事实上, 由于 $\varphi \neq 0$, 故至少存在一个 $y \in H$ 使 $\varphi(y) \neq 0$. 所以 $N(\varphi) \neq H$. 又 φ 是线性泛函, 显然 $N(\varphi)$ 是 H 的线性子空间. 再由于单点集 $\{0\}$ 是闭的, 且 φ 为连续的, 故 $\{0\}$ 的原像 $N(\varphi)$ 是闭的.

由Hilbert空间的直交分解定理知, 存在 $z \neq 0$, $z \in N^\perp(\varphi)$, 故 $\varphi(z) \neq 0$.

任给 $x \in H$, 则 $\varphi(\varphi(x)z) = \varphi(x)\varphi(z)$, $\varphi(\varphi(z)x) = \varphi(z)\varphi(x)$, 所以 $\varphi(\varphi(z)x - \varphi(x)z) = 0$. 即 $\varphi(z)x - \varphi(x)z \in N(\varphi)$, 故必与 z 正交,

$$(\varphi(z)x - \varphi(x)z, z) = 0,$$

即
$$\varphi(z)(x, z) = \varphi(x)(z, z),$$

或
$$\varphi(x) = \frac{\varphi(z)}{(z, z)}(x, z).$$

取 $y = \frac{\overline{\varphi(z)}}{\|z\|^2} z$, 则有

$$\varphi(x) = (x, y).$$

易见 y 是唯一的. 若另有 $y' \in H$, 使得对一切 $x \in H$ 有 $\varphi(x) =$

(x, y') , 则有

$$(x, y - y') = 0, \quad \forall x \in H.$$

于是得 $\|y - y'\| = 0$, 故 $y - y' = 0$, 即 $y = y'$.

再证 $\|\varphi\| = \|y\|$. 由Schwarz不等式有

$$|\varphi(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

故

$$\|\varphi\| \leq \|y\|.$$

另一方面, $\varphi(y) = (y, y) = \|y\|^2$, 或 $\|y\| = \frac{\varphi(y)}{\|y\|}$. 又

$$\|\varphi\| = \sup \left\{ \frac{|\varphi(y)|}{\|y\|}, \quad y \neq 0 \right\}.$$

得

$$\|\varphi\| \geq \|y\|.$$

所以

$$\|\varphi\| = \|y\|.$$

定理得证.

由 $\varphi(x) = (x, y)$ 知 φ 关于 x 是线性的, 而关于 y 是共轭线性的. 事实上,

$$\alpha\varphi(x) = \alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (x, \overline{\alpha}y).$$

此时也称 (x, y) 为殆线性的, 若将 $\varphi(x)$ 记作 $\varphi_y(x)$, 则 $\varphi_y(x)$ 是殆线性的.

以上定理说明, 若作Hilbert空间 H 到它的共轭空间 H^* 的映射 \mathcal{F} 如下:

$$\mathcal{F}: y \rightarrow \varphi_y, \quad y \in H.$$

则 \mathcal{F} 是 H 到 H^* 上的一一映射, 它是共轭线性的, 且保持范数不变.

即 \mathcal{F} 是 H 到 H^* 的复共轭线性同构, 也就是 H 和 H^* 是一致的, 故称 H 是自共轭的.

定理11 若 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 是Hilbert空间 H 中的直交序列, 则下列三个命题是等价的.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 收敛,}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛,

(3) 对于每一个 $y \in H$, $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ 收敛.

证 令 $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 由于 $\{x_n\}$ 是正交集合, 故 $\|s_n\|^2 = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.

(2) \Rightarrow (1).

$$\begin{aligned} \text{设 } n > m, \quad \|s_n - s_m\| &= \|x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n\| \\ &= (\|x_{m+1}\|^2 + \|x_{m+2}\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{1/2} \end{aligned}$$

由(2)知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > m > N$ 有

$$\sum_{k=m}^n \|x_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

所以只要取 $m > N$, 有

$$\|s_n - s_m\| < \varepsilon,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. (1) 得证.

(1) \Rightarrow (3).

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ 存在. 考察 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ 的部分和 t_n :

$$t_n = \sum_{k=1}^n (x_k, y) = \left(\sum_{k=1}^n x_k, y \right) = (s_n, y).$$

令 $t = (s, y)$, 由Schwarz不等式知

$$|t_n - t| = |(s_n - s, y)| \leq \|s_n - s\| \|y\|,$$

因为 $\|s_n - s\| \rightarrow 0$, 故 $|t_n - t| \rightarrow 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$

收敛, (3) 得证.

(3) \Rightarrow (2).

定义 H 上的有界线性泛函 A_n 如下:

$$A_n y = (y, x_1) + (y, x_2) + \cdots + (y, x_n), \quad \forall y \in H.$$

显然 A_n 是线性的, 且由 Schwarz 不等式得

$$|A_n y| \leq \|y\| \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|,$$

即

$$\|A_n\| \leq \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|.$$

又取 $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 则得

$$|A_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2.$$

所以 $\|A_n\| \geq \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|$.

故得 $\|A_n\| = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|$.

由(3)知 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y)$ 收敛, 故 $\{A_n y\} (n=1, 2, \dots)$ 对一切

y 是有界的, 即 $\{\|A_n y\|\}$ 是有界的, 根据 Banach-Steinhaus 定理知 $\{A_n\}$ 是一致有界的. 即存在 $M > 0$, 对于一切 n 有

$$\|A_n\| \leq M.$$

又 $\|A_n\| = \|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| = (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{1/2}$, 故对一切 n 有

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq M^2.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ 收敛, (2) 得证.

定理中(1)说明 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 在 H 中是强收敛的, 而(3)说明

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 是弱收敛的. 定理给出 Hilbert 空间中正交序列所对应的级

数强收敛与弱收敛是等价的.

§ 4.5 Hilbert空间上的线性算子

设 H 是 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示 H 上一切有界线性算子 T 的集合, 在 $B(H)$ 上定义乘法

$$(T \cdot S)(x) = T(S(x)), \quad \forall x \in H.$$

范数为 $\|T\| = \sup\{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\},$

则 $B(H)$ 是一个 Banach 代数, 具有单元 $I: I(x) = x$. 一般来讲 $B(H)$ 是不可交换的.

定理12 若 $T \in B(H)$, 且对每一个 $x \in H$ 有 $(Tx, x) = 0$, 则 $T = 0$.

证 任取 $x, y \in H$, 由假设条件知

$$(T(x+y), x+y) = 0,$$

即 $(Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) = 0,$

由假设得 $(Tx, y) + (Ty, x) = 0, \quad (9)$

在 (9) 式中以 iy 代替 y , 得

$$-i(Tx, y) + i(Ty, x) = 0, \quad (10)$$

由 (9)、(10) 两式得 $(Tx, y) = 0$ 对一切 $x, y \in H$ 成立. 取 $y = Tx$, 得 $\|Tx\|^2 = 0$, 即对一切 x 有 $Tx = 0$. 证毕.

推论1 若 $S \in B(H)$, $T \in B(H)$, 且对每一个 $x \in H$ 有 $(Sx, x) = (Tx, x)$, 则 $T = S$.

证 由假设知对一切 x 有 $((S-T)x, x) = 0$, 所以 $(S-T)x = 0$ 对一切 $x \in H$ 成立, 即 $S = T$.

定理13 若 $f: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ 是双线性泛函且为有界的, 即

$$M = \sup\{|f(x, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1\} < \infty,$$

则存在唯一的有界线性算子 $S \in B(H)$, 满足

$$f(x, y) = (x, Sy), \quad \forall x, y \in H,$$

而且 $\|S\| = M$.

证 因为 $f(x, y)$ 对 x 是线性的, $|f(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|$,

所以对于每一个 $y \in H$, 变换 $\Lambda_y: H \rightarrow \mathbb{C}$:

$$x \xrightarrow{\Lambda_y} f(x, y)$$

是 H 上的有界线性泛函, 且 $\|\Lambda_y\| \leq M \|y\|$. 即 $\Lambda_y \in H^*$. 由定理 10 知, 对于每一个 $y \in H$, 存在唯一的元素 $Sy \in H$, 使得 $\Lambda_y x = f(x, y) = (x, Sy)$, 且 $\|Sy\| = \|\Lambda_y\|$. 所以 $\|Sy\| \leq M \|y\|$.

又 S 作为 $H \rightarrow H$ 的映射, 即 $y \rightarrow Sy$ 是线性的, 事实上,

$$\begin{aligned} (x, S(y_1 + y_2)) &= f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) \\ &= (x, Sy_1) + (x, Sy_2) = (x, Sy_1 + Sy_2). \end{aligned}$$

$$(x, S(\alpha y)) = f(x, \alpha y) = \overline{\alpha} f(x, y) = \overline{\alpha} (x, Sy) = (x, \alpha Sy).$$

即 $S \in B(H)$, 且 $\|S\| \leq M$.

另一方面 $|f(x, y)| = |(x, Sy)| \leq \|x\| \|S\| \|y\|$, 所以 $M \leq \|S\|$. 最后得到 $\|S\| = M$. 定理得证.

若 $T \in B(H)$, $x, y \in H$, 则 (Tx, y) 对 x 为线性的, 对 y 为共轭线性的. 即映射 $f: x, y \rightarrow (Tx, y)$ 为双线性的. 且

$$|f(x, y)| = |(Tx, y)| \leq \|T\| \|x\| \|y\|,$$

即 $\|f\| \leq \|T\|$. f 是有界的, 由定理 13 知, 在 $B(H)$ 中存在唯一的元素, 记作 T^* , 使得

$$(Tx, y) = (x, T^*y).$$

称 T^* 为 T 的共轭算子或伴随算子.

容易看出 $\|T^*\| = \|T\|$. 事实上由定理 13 知

$$\|T^*\| \leq \|T\|.$$

另外, $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx) \leq \|x\| \|T^*\| \|Tx\|$, 所以 $\|Tx\| \leq \|x\| \|T^*\|$, 即 $\|T\| \leq \|T^*\|$. 于是有 $\|T\| = \|T^*\|$.

$T \rightarrow T^*$ 可以看成由 Banach 代数 $B(H)$ 到 $B(H)$ 的一个映射, 它具有以下四个性质:

$$(1) (S+T)^* = S^* + T^*$$

$$(2) (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$$

$$(3) (ST)^{\circ} = T^{\circ} S^{\circ}$$

$$(4) T^{\circ\circ} = T$$

下面证明(1)–(4).

$$(1) ((S+T)x, y) = (x, (S+T)^{\circ}y). \text{ 又}$$

$$((S+T)x, y) = (Sx, y) + (Tx, y) = (x, S^{\circ}y) + (x, T^{\circ}y) \\ = (x, S^{\circ} + T^{\circ}y).$$

所以 $(S+T)^{\circ} = S^{\circ} + T^{\circ}.$

$$(2) (x, (aT)^{\circ}y) = (aTx, y) = a(Tx, y) = a(x, T^{\circ}y) \\ = (x, \overline{a} T^{\circ}y).$$

所以 $(aT)^{\circ} = \overline{a} T^{\circ}.$

$$(3) (x, (ST)^{\circ}y) = (STx, y) = (Tx, S^{\circ}y) = (x, T^{\circ}S^{\circ}y)$$

所以 $(ST)^{\circ} = T^{\circ}S^{\circ}.$

$$(4) (Tx, y) = (x, T^{\circ}y) = \overline{(T^{\circ}y, x)} = \overline{(y, T^{\circ\circ}x)} \\ = (T^{\circ\circ}x, y)$$

所以 $T^{\circ\circ} = T.$

映射 $T \rightarrow T^{\circ}$ 满足以上四个性质, 称 $T \rightarrow T^{\circ}$ 为 $B(H)$ 上的一个对合 (involution).

$$\text{由于 } \|T^{\circ}T\| \leq \|T^{\circ}\| \|T\| = \|T\|^2,$$

$$\text{及 } \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (x, T^{\circ}Tx) \leq \|T^{\circ}T\| \|x\|^2,$$

即 $\|T\|^2 \leq \|T^{\circ}T\|$, 得

$$\|T^{\circ}T\| = \|T\|^2. \quad (11)$$

在 Banach 代数 $B(H)$ 上由 $(Tx, y) = (x, T^{\circ}y)$ 定义了 $T \rightarrow T^{\circ}$ 的对合, 且满足(11). 称 $B(H)$ 为一个 B° -代数. 也称 $T \rightarrow T^{\circ}$ 为一个周期为 2 的反自同构. (Anti-automorphism of period 2).

定理 14 若 $T \in B(H)$, $N(T)$ 表示 T 的零空间, $R(T)$ 表示 T 的值域, 则

$$N(T) = R(T^{\circ})^{\perp}, \quad N(T^{\circ}) = R(T)^{\perp}$$

$$\text{证 } N(T) = \{x \in H \mid Tx = 0\}, \quad R(T) = \{Tx \mid x \in H\}$$

$$\begin{aligned} x \in N(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow (Tx, y) = 0, \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow (x, T^*y) = 0, \forall y \in H \Leftrightarrow x \in R(T^*)^\perp. \end{aligned}$$

所以 $N(T) = R(T^*)^\perp$.

同理可得 $N(T^*) = R(T)^\perp$.

定义 7 设算子 $T \in B(H)$,

(1) 若 $TT^* = T^*T$, 则称 T 为正规算子.

(2) 若 $T^* = T$, 则称 T 为自共轭算子.

(3) 若 $TT^* = I = T^*T$, 其中 I 为 H 上的单位算子, 则称 T 为酉算子或保范算子.

(4) 若 $T^2 = T$, 则称 T 为射影算子.

由定义知自共轭算子和酉算子必为正规算子, 在 $B(H)$ 中我们主要是讨论正规算子.

定理 15 设 $T \in B(H)$,

(1) T 是正规算子, 当且仅当对一切 $x \in H$, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ 成立.

(2) 若 T 是正规算子, 则 $N(T) = N(T^*) = R(T)^\perp$.

(3) 若 T 是正规算子, 且对某个 $x \in H$, $\alpha \in \mathbf{C}$ 有 $Tx = \alpha x$, 则必有 $T^*x = \overline{\alpha}x$.

(4) 若 T 是正规算子, α, β 是 T 的不同的特征值, 则与之相应的特征空间相互正交.

证 (1) 任给 $x \in H$, 有

$$\|Tx\| = (Tx, Tx) = (x, T^*Tx),$$

$$\|T^*x\| = (T^*x, T^*x) = (x, TT^*x),$$

若 T 为正规算子, 则 $T^*T = TT^*$, 所以 $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

反之, 若 $\|Tx\| = \|T^*x\|$, 则

$$(x, T^*Tx) = (x, TT^*x),$$

所以 $T^*T = TT^*$, 故 T 为正规算子.

$$\begin{aligned} (2) x \in N(T) &\Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0 \Leftrightarrow \|T^*x\| = 0 \Leftrightarrow \\ &T^*x = 0 \Leftrightarrow x \in N(T^*). \end{aligned}$$

所以 $N(T) = N(T^*)$, 再利用定理14得

$$N(T) = N(T^*) = R(T)^\perp.$$

(3) 由假设 T 是正规的, 则 $T - \alpha I$ 也是正规的. 事实上,

$$(T - \alpha I)^* = T^* - \bar{\alpha} I,$$

注意到 T 与 T^* , T 与 I 是可交换的, 得

$$(T - \alpha I)(T - \alpha I)^* = (T - \alpha I)^*(T - \alpha I).$$

若对某个 $x \in H$, $\alpha \in \mathbb{C}$ 有 $Tx = \alpha x$, 则 $(T - \alpha I)x = 0$, 利用(2)得 $(T - \alpha I)^*x = 0$, 即 $T^*x = \bar{\alpha}x$.

这个结论说明, 若 α 是正规算子 T 的特征值, 则 $\bar{\alpha}$ 必为算子 T^* 的特征值.

(4) 设 $Tx = \alpha x, Ty = \beta y, \alpha \neq \beta$. 则

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y) = (Tx, y) = (x, T^*y) = (x, \bar{\beta}y) = \beta(x, y).$$

即
$$(\alpha - \beta)(x, y) = 0.$$

因为 $\alpha \neq \beta$, 所以 $(x, y) = 0$. 即 $x \perp y$, 证毕.

定理16 若 $T \in B(H)$, 则以下三个命题是等价的.

(1) T 是酉算子.

(2) $R(T) = H$, 且对所有的 $x \in H, y \in H, (Tx, Ty) = (x, y)$ 恒成立.

(3) $R(T) = H$, 且对一切 $x \in H, \|Tx\| = \|x\|$ 恒成立.

证 (1) \implies (2).

T 是酉算子, $T^*T = I = TT^*$. 则对于 H 的任一元素 x 都有

$$x = Ix = TT^*x = T(T^*x).$$

这表明 $R(T) = H$. 又由 $T^*T = I$ 得

$$(Tx, Ty) = (x, T^*Ty) = (x, y).$$

(2) \implies (3). 显然, 只需在(2)中取 $x = y$.

(3) \implies (1). 对于每一个 $x \in H$, 由(3)有

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = (x, x),$$

所以 $T^*T = I$

另一方面, (3)蕴涵着 T 是 H 到 H 上的等距线性映射, 所以 T

在 $B(H)$ 中有逆. 又由 $T^*T=I$ 知 $T^*=T^{-1}$. 所以 $T^*T=TT^*=I$.
即 T 为酉算子. 证毕.

注: (1)、(2)的等价性表明酉算子是 H 上的线性同构, 且保持内积, 所以是Hilbert空间的自同构.

定理17 设 $T \in B(H)$ 是射影算子, 以下四个性质是等价的.

(1) T 是自共轭算子.

(2) T 是正规算子.

(3) $R(T)=N(T)^\perp$.

(4) $(Tx, x) = \|Tx\|^2$ 对每一个 $x \in H$ 成立.

证

(1) \implies (2). 由定义显然.

(2) \implies (3). T 是正规算子, 由定理15知, $N(T)=R(T)^\perp$.
 T 是射影算子, 则 $R(T)=N(I-T)$. 事实上, 若 $Tx \in R(T)$, 则
 $(I-T)Tx = Tx - T^2x = 0$. 即 $Tx \in N(I-T)$. 所以 $R(T) \subset N(I-T)$.

反之, 若 $y \in N(I-T)$, 则 $y = Ty$, 即 $y \in R(T)$.

所以 $N(I-T) \subset R(T)$.

又 $I-T$ 是有界线性算子, 其零空间是闭的, 故 $R(T)$ 是 H 的
闭子空间. 由定理5得

$$[R(T)^\perp]^\perp = R(T) = N(T)^\perp.$$

(3) \implies (4).

若(3)成立, 则每一个 $x \in H$ 可唯一地表示为 $x = y + z$, 其中
 $Ty = 0$, $z \in N(T)^\perp = R(T)$. 即 $z \perp y$ 且存在 $u \in H$ 使 $Tu = z$.
又 T 是射影算子. 故

$$Tz = TTu = Tu = z.$$

即得

$$Tx = Tz = z.$$

所以 $(Tx, x) = (z, y+z) = (z, z) = \|Tx\|^2$.

(4) \implies (1).

若(4)成立. 则

$$\|Tx\|^2 = (Tx, x) = (x, T^*x)$$

注意到 $\|Tx\|^2$ 是实数，故由上式知 $(x, T^*x) = (T^*x, x)$ 。于是对一切 $x \in H$ 有

$$(Tx, x) = (T^*x, x)$$

由定理12，得 $T = T^*$ 。即 T 是自共轭算子，证毕。

定理18 设 T 是自共轭算子， $S \in B(H)$ ，则 $TS = 0$ 当且仅当 $R(T) \perp R(S)$ 。

证 对于一切 $x, y \in H$ 有

$$(Tx, Sy) = (x, T^*Sy) = (x, TSy).$$

若 $TS = 0$ ，则 $(Tx, Sy) = 0$ ，所以 $R(T) \perp R(S)$ 。

反之，若 $R(T) \perp R(S)$ ，则 $(x, TSy) = 0$ 对一切 $x \in H, y \in H$ 成立。所以 $TS = 0$ 。证毕。

顺便指出，在 B^* -代数 $B(H)$ 中，由于引入了对合，可以将 $B(H)$ 中的算子 T 唯一表示成

$$T = A + iB,$$

其中 A, B 皆为自共轭算子。

事实上，若以上表示式成立，则

$$T^* = (A + iB)^* = A^* + \overline{i}B^* = A - iB,$$

于是必有

$$A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

显然 A, B 是自共轭的。

以上事实类似于复函数由实部与虚部来表示，由此可以理解对合的意义。

下面研究 B^* -代数 $B(H)$ 中算子的交换性质。若 x, y 是 $B(H)$ 中的可交换算子，即 $xy = yx$ ，则由 $x^*y^* = (yx)^*$ 知 x^*, y^* 也是可交换的。那末 x 与 y^* 或 x^* 与 y 是否可交换？一般言之，答案是否定的。例如取 $y = x$ ，当 x 不是正规算子时，则 $xx^* \neq x^*x$ 。可以证明下列命题是成立的。

若 M 是 $B(H)$ 中的正规算子, $T \in B(H)$ 且 $MT=TM$, 则 $M^*T=TM^*$.

事实上, 成立着如下所示的更一般的结论.

定理 19 (Fuglede-Putnam-Rosenblum) 设 M 、 N 、 $T \in B(H)$, M 、 N 是正规算子且 $MT=TN$, 则 $M^*T=TN^*$.

证 取 $S \in B(H)$, 令 $V=S^*-S$. 定义

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n.$$

又 $V^*=S-S^*=-V$, 所以

$$Q^* = \exp(-V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-V)^n.$$

于是有 $QQ^* = \exp(V-V) = 1$, $Q^*Q = 1$,

即 Q 为酉算子, 且 $\|Q\|=1$. 即对一切 $S \in B(H)$ 有

$$\|\exp(S^*-S)\| = 1.$$

由于 $MT=TN$, 得

$$M^2T = M(MT) = M(TN) = (MT)N = TN^2,$$

用归纳法可得

$$M^K T = T N^K, \quad K=1, 2, \dots$$

所以

$$\exp(M)T = T\exp(N).$$

由 $(\exp(M))^{-1} = \exp(-M)$ 得

$$T = \exp(-M)T\exp(N)$$

上式左乘 $\exp(M^*)$, 右乘 $\exp(-N^*)$, 并利用 M , N 是正规算子, 得

$$\exp(M^*)T\exp(-N^*) = \exp(M^*-M)T\exp(N-N^*),$$

所以 $\|\exp(M^*)T\exp(-N^*)\| \leq \|T\|$.

由于 M 、 N 是正规的, 知 λM 、 λN 也是正规的, 其中 λ 为任何复数. 在上式中以 $\overline{\lambda}M$, $\overline{\lambda}N$ 分别代替 M 、 N , 得

$$\|\exp(\lambda M^*)T\exp(-\lambda M^*)\| \leq \|T\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

记 $f(\lambda) = \exp(\lambda M^*) T \exp(-\lambda N^*), \forall \lambda \in \mathbf{C}.$

则 $\|f(\lambda)\| \leq \|T\|$ 对一切 $\lambda \in \mathbf{C}$ 成立. 于是 $f(\lambda)$ 是一个有界的取值于 $B(H)$ 的整函数, 由 Liouville 定理知 $f(\lambda) \equiv C$. 所以

$$f(\lambda) = f(0) = T, \forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

即

$$\exp(\lambda M^*) T = T \exp(\lambda N^*).$$

比较等式两端 λ 的系数, 得

$$M^* T = T N^*.$$

§ 4.6 B^* -代数的 Gelfand 变换

定理 20 (Gelfand-Naimark 定理) 设 A 是可交换的 B^* -代数, 具有单元 e , 且 $\|e\| = 1$, Δ 是 A 的极大理想空间, 则 Gelfand 变换 $x \rightarrow \hat{x}$ 即 $A \rightarrow \hat{A}$ 是 A 到 $C(\Delta)$ 上的一个保持范数的 $*$ -同构.

即保持所有代数运算, 且保持对合 $\hat{x}^* = \overline{\hat{x}}$. 特别地, 若 x 是自共轭的 $x = x^*$, 则 \hat{x} 是实值的连续函数.

证 已知 $\varphi \in \Delta$, 作 Gelfand 变换 $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, $x \in A$, 若取 Gelfand 弱拓扑, 则 \hat{x} 是连续函数, 即 $\hat{x} \in C(\Delta)$, 故 $\hat{A} \subset C(\Delta)$.

首先证明, 若 $u \in A$ 是自共轭的, $u = u^*$, 则 \hat{u} 是实的. 任取代数同态 $\varphi \in \Delta$, 证明 $\hat{u}(\varphi)$ 是实的.

设 $\hat{u}(\varphi) = \varphi(u) = \alpha + i\beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). 令 $z = u + ite$, 其中 $t \in \mathbf{R}$, 则 $z^* = u^* - ite^* = u - ite$, 且

$$\varphi(z) = \varphi(u) + it\varphi(e) = \alpha + i(\beta + t),$$

所以 $\alpha^2 + (\beta + t)^2 = \varphi(z) \overline{\varphi(z)} = |\varphi(z)|^2 \leq \|\varphi\|^2 \|z\|^2$,

又 $\|\varphi\| \leq 1$ 且 $\|z\|^2 = \|zz^*\| = \|u^2 + t^2 e\| \leq \|u\|^2 + t^2$. 于是有

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|u\|^2$$

对一切 $t \in \mathbf{R}$ 成立. 所以 $\beta = 0$, 即 $\hat{u}(\varphi) \in \mathbf{R}$. 由于 φ 是任取的,

故 $\widehat{u}(\Delta) \in \mathbb{R}$.

下面证明 $\widehat{x}^* = \overline{\widehat{x}}$. 任取 $x \in A$, 则 $x = u + iv$, 其中 $u = u^*$, $v = v^*$. 故 $x^* = u - iv$. 所以

$$\widehat{x}^* = \widehat{u} - i\widehat{v} = \overline{\widehat{u} + i\widehat{v}} = \overline{\widehat{x}}.$$

再证 $A \rightarrow \widehat{A}$ 保持范数, 即 $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|$. 利用公式

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

来证明, 先假设 x 是自共轭的, $x = x^*$, 则

$$\|x^2\| = \|xx^*\| = \|x\|^2,$$

所以

$$\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n},$$

或

$$\|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|.$$

于是有 $\|\widehat{x}\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|$.

一般地, 若 x 不是自共轭的, 令 $z = xx^*$, 则 $z = z^*$, 所以

$\|\widehat{z}\|_\infty = \|z\|$. 又 $\widehat{z} = \widehat{x}\widehat{x}^*$, 且已证明 $\widehat{x}^* = \overline{\widehat{x}}$ 故

得 $\|\widehat{z}\|_\infty = \|\widehat{x}\widehat{x}^*\|_\infty = \|\widehat{x}\overline{\widehat{x}}\|_\infty = \||\widehat{x}|^2\|_\infty = \|\widehat{x}\|_\infty^2$.

又 $\|z\| = \|xx^*\| = \|x\|^2$,

所以 $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|$.

最后证明 $\widehat{A} = C(\Delta)$. \widehat{A} 是 $C(\Delta)$ 的子代数, 又由 $\widehat{x}^* = \overline{\widehat{x}}$ 知, 若 $\widehat{x} \in \widehat{A}$, 则 $\overline{\widehat{x}} \in \widehat{A}$, 即 \widehat{A} 是自共轭的. 又在第三章中已经证明 \widehat{A} 是可以分离点的, 同时 $\widehat{e} = 1 \neq 0$, 故 \widehat{A} 不在任何点消失为 0. 即 \widehat{A} 是满足 Stone-Weierstrass 定理中条件 (1)、(2)、(3) 的子代数, 所以

$$Cl \widehat{A} = C(\Delta).$$

又 $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$, 故 \hat{A} 与 A 是完全一样的, 由此可证明 \hat{A} 是闭的. 因任取 $z \in \overline{C(A)}$, 则有 $x_n \in A$, 且 $x_n \rightarrow z$. 故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 由于 $A \rightarrow \hat{A}$ 保持范数, 故 $\{x_n\}$ 也是 Cauchy 序列. 故 $x_n \rightarrow x$. 所以 $\hat{x} = z$, 即 $z \in \hat{A}$. 这说明 \hat{A} 是闭的. 于是得到

$$\hat{A} = C(\Delta).$$

定理得证.

定理21 设 A 是可交换的 B^* -代数, 具有单元, 若 $x \in A$ 使得以 x 和 x^* 为元的多项式 $p(x, x^*)$ 在 A 中稠密, 则

(1) Gelfand 变换 $\hat{x}: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ 是 1-1 映射.

(2) 存在 ψ , 它是 $C(\sigma(x))$ 到 A 上的保持范数的 $*$ -同构映射.

证 (1) 欲证 \hat{x} 是 1-1 映射, 只需证明对于任意的 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Delta$, 若 $\hat{x}(\varphi_1) = \hat{x}(\varphi_2)$, 则 $\varphi_1 = \varphi_2$.

因为 $\hat{x}(\varphi_1) = \varphi_1(x)$, $\hat{x}(\varphi_2) = \varphi_2(x)$. 故若 $\hat{x}(\varphi_1) = \hat{x}(\varphi_2)$, 则 $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. 又 $\hat{x}^* = \overline{\hat{x}}$. 所以由 $\hat{x}(\varphi_1) = \hat{x}(\varphi_2)$ 得 $\hat{x}^*(\varphi_1) = \hat{x}^*(\varphi_2)$, 即 $\varphi_1(x^*) = \varphi_2(x^*)$.

又 φ_1, φ_2 是代数同态, 多项式 $p(x, x^*)$ 是常数与 x 的方幂或常数与 x^* 的方幂的乘积之和, 故

$$\varphi_1(p(x, x^*)) = \varphi_2(p(x, x^*)).$$

又 $p(x, x^*)$ 在 A 中稠密, 故对任意 $y \in A$ 有

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(y),$$

所以 $\varphi_1 = \varphi_2$. 即 \hat{x} 是 1-1 的.

(2) \hat{x} 是 1-1 的, 又 \hat{x} 连续且 Δ 是紧集合, 故 \hat{x} 是由 Δ 到其值域 $\sigma(x)$ 上的同胚映射, 这是由于 Δ 是紧集合, $\hat{x}(\Delta) = \sigma(x)$ 是紧的, 故 Δ 中的闭集映成 $\hat{x}(\Delta)$ 中的闭集. 所以 $\sigma(x)$ 上的连续函数可以看成是 Δ 上的连续函数. 即

$$C(\sigma(x)) \cong C(\Delta).$$

也就是 $f \rightarrow f \circ \hat{x}$ 为由 $C(\sigma(x))$ 到 $C(\Delta)$ 上保持范数的 $*$ -同构映射. 由 Gelfand-Naimark 定理知 $C(\Delta) = \hat{A} \cong A$. 故 Δ 上的连续函数 $f \circ \hat{x}$ 一定等于 A 中某个元素的 Gelfand 变换. 即

$$\widehat{f \circ x} = (\psi f)^{\wedge} \quad (\psi f \in A).$$

且 ψf 完全由 f 唯一决定, 即 ψ 是一个由 $C(\sigma(x))$ 到 A 上的保持范数的 \bullet -同构映射, $\|\psi f\| = \|f\|_{\infty}$.

特别, 若 $f(\lambda) = \lambda$ ($\lambda \in \sigma(x)$), 则 $\widehat{f \circ x} = \widehat{x}$, 由 $\widehat{f \circ x} = (\psi f)^{\wedge}$ 知 $\psi f = x$. 定理得证.

§ 4.7 对合映射 $x \rightarrow x^*$ 的性质

若 A 是 B^* -代数, 由定义知 $\|xx^*\| = \|x\|^2$. 由此得出

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|x\| \|x^*\|,$$

所以 $\|x\| \leq \|x^*\|$.

又 $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$,

于是有 $\|x\| = \|x^*\|$. 所以对合映射 $x \rightarrow x^*$ 是连续的.

若 A 是具有对合的 B -代数, 那么 $x \rightarrow x^*$ 是否仍保持连续性呢? 下面讨论这个问题.

定义 8 若 A 是集合 X 到集合 Y 的映射. 称集合 $G = \{(x, Ax) | x \in X\}$ 为 A 的图象.

定理 22 (闭图象定理) 若 X, Y 是Banach空间, $A: X \rightarrow Y$ 是线性的. $G = \{(x, Ax) | x \in X\}$ 在 $X \times Y$ 中是闭的. 则 A 是连续的.

证 在 $X \times Y$ 中定义加法、数乘和范数:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

则 $X \times Y$ 也是一个Banach空间.

因为 A 是线性映射, 显然 G 是一个线性空间, 又由假设知 G 是闭的, 所以 G 是一个Banach空间.

定义 $G \rightarrow X$ 的映射 p :

$$p(x, Ax) = x.$$

即 p 为 G 到 X 上的投影算子. 显然 p 是线性连续的, 且为 G 到 X 上的 1-1 映射, 由开映射定理知, 其逆映射

$$p^{-1}: X \rightarrow G$$

是连续的.

再定义 $X \times Y \rightarrow Y$ 的映射 q :

$$q(x, y) = y,$$

q 也是线性连续的. 故映射

$$q \circ p^{-1}: X \rightarrow Y$$

也是连续的. 但 $A = q \circ p^{-1}$. 所以 A 是连续的, 证毕.

注 常常以下述事实检验图象 G 是否是闭的.

设 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, 若当

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$$

存在时, 必有 $Ax = y$; 则线性映射 A 的图象 G 必是闭的.

证 令 (x, y) 是 G 的一个极限点, 则在 G 中必有序列 (x_n, Ax_n) 以 (x, y) 为极限, 即有序列 $\{x_n\}$

使 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, Ax_n) = (x, y)$.

因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y,$

由假设有 $y = Ax$, 即 $(x, y) \in G$, 所以 G 是闭的.

定理23 A 是可交换的 B -代数, 具有单元和对合, 若 A 是半单纯的, 则 $x \rightarrow x^*$ 是连续的.

证 对合映射 $x \rightarrow x^*$ 是共轭线性的. 为利用闭图象定理证明 $x \rightarrow x^*$ 的连续性, 先看以下事实.

设 $A: X \rightarrow Y$ 是共轭线性映射. 由 Y 作空间 Y_1 , 使 Y_1 和 Y 作为集合是相同的, 即所含元素是相同的. 在 Y_1 中定义加法和数乘:

$$y+z|_{\text{在 } Y_1 \text{ 中}} = y+z|_{\text{在 } Y \text{ 中}}, \quad \forall y, z \in Y,$$

$$a \cdot y|_{\text{在 } Y_1 \text{ 中}} = \overline{a} \cdot y|_{\text{在 } Y \text{ 中}}, \quad \forall y \in Y, a \in \mathbb{C}.$$

且定义范数 $\|y\|_{Y_1} = \|y\|_Y$. 则可将 A 看成 X 到 Y_1 的映射, 且

为线性的. 若 $\mathcal{A}: X \rightarrow Y_1$ 是连续映射, 由 Y 和 Y_1 上的范数定义知, $\mathcal{A}: X \rightarrow Y$ 也是连续的.

按以上讨论, 可将对合映射 $x \rightarrow x^*$ 看成线性映射. 为证其连续性, 只需证明其图象 $\{(x, x^*)\}$ 在 $A \times A$ 中是闭的. 利用定理22的注知, 只需证明当 $x_n \rightarrow x$, $x_n^* \rightarrow y$ 时, 有 $y = x^*$.

设 \mathcal{A} 是 A 的极大理想空间, $\varphi \in \mathcal{A}$, 定义 $A \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射 ψ 为:

$$\psi(x) = \overline{\varphi(x^*)}.$$

则必有 $\psi \in \mathcal{A}$. 事实上,

$$\begin{aligned} \psi(x+y) &= \overline{\varphi((x+y)^*)} = \overline{\varphi(x^*) + \varphi(y^*)} = \overline{\varphi(x^*)} + \overline{\varphi(y^*)} \\ &= \psi(x) + \psi(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(ax) &= \overline{\varphi((ax)^*)} = \overline{\varphi(\overline{a} x^*)} = \overline{\overline{a} \varphi(x^*)} \\ &= a \overline{\varphi(x^*)} = a\psi(x). \end{aligned}$$

$$\psi(xy) = \overline{\varphi((xy)^*)} = \overline{\varphi(y^* x^*)} = \overline{\varphi(y^*) \varphi(x^*)} = \psi(x) \psi(y)$$

设 $x_n \rightarrow x$, $x_n^* \rightarrow y$. 由 ψ 的连续性知 $\psi(x_n) \rightarrow \psi(x)$. 即 $\overline{\varphi(x_n^*)} \rightarrow \overline{\varphi(x^*)}$. 所以 $\varphi(x_n^*) \rightarrow \varphi(x^*)$.

又由于 $x_n^* \rightarrow y$, φ 为连续的. 故 $\varphi(x_n^*) \rightarrow \varphi(y)$, 所以得到

$$\varphi(x^*) = \varphi(y), \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}.$$

也就是 $\varphi(x^* - y) = 0$ 对一切 $\varphi \in \mathcal{A}$ 成立. 即

$$(x^* - y)(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}.$$

所以 $x^* - y$ 在 Gelfand 变换的核内. 由假设 A 是半单纯的, 即 A 的

根 $R = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M = \{0\}$, 也就是 Gelfand 变换的核: $R = \{x \mid \widehat{x} =$

$0\} = 0$. 所以

$$x^* = y.$$

由闭图象定理知, $x \rightarrow x^*$ 是连续的. 定理得证.

在具有对合的 Banach 代数中, 常常要研究元素 x 的平方根. 下面的定理给出在什么条件下, 一个自共轭元素将有自共轭的平方根.

定理24 A 是可交换的 B -代数, 具有单元和对合. 若 $x \in A$ 且 $x = x^*$, $\sigma(x)$ 不含非正的实数, 则存在 $y \in A$ 使 $y^2 = x$ 且 $y = y^*$.

证 分两步证明.

(1) 首先就 A 是半单纯的情形证明定理. 由定理23知, 此时对合映射 $x \rightarrow x^*$ 是连续的.

令开集 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. 由假设 $\sigma(x) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$, 故 $\sigma(x) \subset \Omega$. 取解析函数 $f \in H(\Omega)$ 使 $f^2(\lambda) = \lambda$, 且 $f(1) = 1$, 于是可以定义向量值函数

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

其中 Γ 是 Ω 中环绕 $\sigma(x)$ 的围道.

令 $y = \tilde{f}(x)$. 则 $y^2 = (\tilde{f}(x))^2 = (\tilde{f}^2)(x)$. 因为 $f^2(\lambda) = \lambda$, 故 $(\tilde{f}^2)(x) = x$. 所以 $y^2 = x$.

根据Runge定理知, 在 Ω 的紧子集上有多项式序列 $\{P_n(\lambda)\}$ 一致收敛于 $f(\lambda)$. 令

$$q_n(\lambda) = \frac{1}{2}(p_n(\lambda) + \overline{p_n(\bar{\lambda})}),$$

则 $q_n(\lambda)$ 的系数皆为实数. 又由于 $f(\bar{\lambda}) = \overline{f(\lambda)}$, 故由 $p_n(\lambda)$ 一致收敛于 $f(\lambda)$ 知 $q_n(\lambda)$ 在 Ω 的紧子集上一致收敛于 $f(\lambda)$.

$q_n(\lambda)$ 是多项式, 所以 $q_n(x) = \tilde{q}_n(x)$. 故 $\tilde{q}_n(x)$ 收敛于 $\tilde{f}(x) = y$. 又对合是连续的, 故由 $q_n(x) \rightarrow y$ 推出 $q_n(x)^* \rightarrow y^*$. $q_n(x)$ 的系数是实数, $x^* = x$. 故 $q_n(x)^* = q_n(x)$. 因此由 $q_n(x) \rightarrow y$, $q_n(x)^* \rightarrow y^*$ 得到 $y = y^*$.

若 x 的谱是正实数, 则其平方根 y 的谱也是正实数. 事实上, 由第三章谱映射定理, 有

$$\sigma(y) = \sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \subset f((0, \infty)) \subset (0, \infty).$$

(2) 再考虑 A 不是半单纯的情形, 这时不能保证对合的连续性. 为证明定理的结论引入对称理想概念.

若 I 是 A 中的一个理想, $x \in I$, 则有 $x^* \in I$, 这时称 I 为对称理想. 如果 A 中有对合, I 是闭的对称真理想, 则可将映射 $x \rightarrow x^*$ 引到 A/I 中. 即在 A/I 中定义对合;

$$(\dot{x})^* = (\dot{x}^*).$$

由于 I 是对称的, 以上定义是有意义的. 事实上, 若 $\dot{x} = \dot{y}$, 则 $(\dot{x})^* = (\dot{y})^*$. 因为若 $\dot{x} = \dot{y}$, 则 $x - y \in I$, I 是对称的, 所以 $(y - x)^* = y^* - x^* \in I$. 即 $(\dot{y})^* = (\dot{x})^*$.

因为 A 的根 R 是对称的, 故 A/R 上可引入对合, 且显然 A/R 是半单纯的 (读者自己证明), 因而对合映射 $\dot{x} \rightarrow (\dot{x})^*$ 是连续的.

在 A 中若有 $y_n \rightarrow y$, 由于 $\pi: A \rightarrow A/R$ 是连续的, 相应地在商代数 A/R 中有 $\dot{y}_n \rightarrow \dot{y}$. 由对合的连续性有 $(\dot{y}_n)^* \rightarrow (\dot{y})^*$. 又 $y_n = q_n(x)$ 是自共轭的, 即 $y_n^* = y_n$, 所以 $\dot{y} = (\dot{y}^*)$, 即 $y - y^* \in R$. 于是对每一个非零代数同态 φ , 有 $\varphi(y - y^*) = 0$.

记 $y = u + iv$, 其中 $u = u^*$, $v = v^*$, 则 $y^* = u - iv$, 现在证明 $v = 0$. 注意到 $y^2 = x = u^2 - v^2 + 2iuv$, 而 $x = x^*$, 所以 $uv = 0$, 即 $y^2 = u^2 - v^2$. 又 $y - y^* = 2iv$. 故对一切 $\varphi \in \mathcal{A}$ 有 $\varphi(v) = 0$. 所以 $\varphi(y^2) = \varphi(u^2) - \varphi(v^2) = \varphi(u^2)$. 又 $\varphi(y^2) = \varphi(x) \neq 0$. 这是因为 $\varphi(x)$ 即 $\varphi(\varphi)$ 的值域 $\sigma(x)$ 不包含 0. 故 $\varphi(u^2) = (\varphi(u))^2 \neq 0$. 即对一切 $\varphi \in \mathcal{A}$, $\varphi(u) \neq 0$. 也就是 u 不属于任何极大理想, 故 u^{-1} 存在. 又 $v = u^{-1}(uv) = 0$. 所以 $y = y^*$. 定理得证.

在以上定理中, 若将 A 是可交换的这个条件去掉, 定理仍然成立. 下面讨论这个问题.

定义 9 若 A 是 B -代数, 具有单元和对合, 若 $x \in A$ 且 $xx^* = x^*x$, 则称 x 为正规的. 若 $S \subset A$ 满足

(1) S 可交换, 即 $st = ts$, $\forall s, t \in S$,

(2) $S^* = S$. 即若 $s \in S$, 则 $s^* \in S$,

则称 S 是 A 的正规子集. 若 $B \subset A$ 满足

(1) B 是正规子集.

(2) 若 $C \subset A$ 是正规的, 且 $C \supset B$, 必有 $C = B$,

则称 B 为 A 的极大正规子集.

定理25 A 是 B -代数, 具有单元和对合, B 是 A 的极大正规子集, 则

(1) B 是 A 的闭的可交换的子代数.

(2) 对于一切 $x \in B$, $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

证 (1) 首先证明以下事实:

若 $x \in A$ 满足 $xx^* = x^*x$, 且对一切 $y \in B$ 有 $xy = yx$, 则 $x \in B$.

若 $y \in B$, 则 $y^* \in B$. 由假设 $xy = yx$, $xy^* = y^*x$, 又 $x^*y = (y^*x)^*$, 所以 $x^*y = (xy^*)^* = yx^*$.

令 $C = B \cup \{x, x^*\}$, 由以上假设和讨论知 C 中任何两个元素可交换, 且显然 $C^* = C$, 所以 C 是 A 的正规子集, 又 B 是 A 的极大正规子集, $C \supset B$, 所以 $C = B$. 即 $x \in B$.

再证 B 是子代数.

若 $x, z \in B$, 证明 $x + z \in B$.

$$(x+z)y = xy + zy = yx + yz = y(x+z), \quad \forall y \in B.$$

$$\begin{aligned} (x+z)^*(x+z) &= x^*x + z^*x + x^*z + z^*z = xx^* + xz^* + zx^* + zz^* \\ &= (x+z)(x+z)^* \end{aligned}$$

由前知 $x + z \in B$. 同理可证 $ax \in B$, $\forall a \in C$, 且 $xz \in B$, 故 B 是子代数.

最后证明 B 是闭的.

设 $x_n \in B$, 且 $x_n \rightarrow x$, 今证 $x \in B$. 仍利用(1)中已证事实. 因为对一切 $y \in B$, 有 $x_n y = y x_n$, 所以 $x y = y x$. 又在上面已证明此时有 $x^* y = y x^*$. 今取 $y = x_n$, 得 $x^* x_n = x_n x^*$. 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $x^* x = x x^*$. 由此知 $x \in B$, 故 B 是闭的. 结论(1)得证.

(2) B 是 A 的子代数, 由谱半径公式 $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

知 $\rho_A(x) = \rho_B(x)$. 现要证明 $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. 因为

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \text{ 在 } A \text{ 中不可逆}\}.$$

$$\sigma_B(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \text{ 在 } B \text{ 中不可逆}\}.$$

$B \subset A$. 显然 $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$.

为证明 $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$. 需证若 $y \in B$ 且 $y^{-1} \in A$, 则必有 $y^{-1} \in B$. 仍利用(1)中已证事实证明.

因为 $yy^* = y^*y$, 且由 $e^* = ee^*$, 得 $e = ee^*$. 所以 $e = e^*$. 又 $y^*(y^{-1})^* = (y^{-1}y)^* = e^* = e$,

得 $(y^*)^{-1} = (y^{-1})^*$, 所以

$$y^{-1}(y^{-1})^* = y^{-1}(y^*)^{-1} = (y^*y)^{-1} = (yy^*)^{-1} = (y^{-1})^*y^{-1}.$$

对一切 $z \in B$, 有 $yz = zy$, 所以, $z = zyy^{-1} = yzy^{-1}$. 即 $y^{-1}z = zy^{-1}$. 由(1)知 $y^{-1} \in B$.

以上事实说明, 若 $y \in B$ 且在 A 中可逆, 则必在 B 中可逆. 即若 $\lambda \notin \sigma_A(x)$, 则 $\lambda \notin \sigma_B(x)$, 即 $\sigma_A(x) \supset \sigma_B(x)$. (2)得证.

定理26 A 是 B -代数, 具有单元和对合, 若 $x \in A$ 且 $x = x^*$, $\sigma(x)$ 不含非正实数, 则存在 $y \in A$ 使 $y^2 = x$ 且 $y^* = y$.

证 $x \in A$ 且 $x = x^*$, 作 A 的所有包含 x 的正规子集合, 构成集合 \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \{M \mid x \in M, M \text{ 是 } A \text{ 的正规子集合}\}.$$

按集合的包含关系, \mathcal{M} 为一个半序集, 在 \mathcal{M} 中任取一个链 $\{M_\alpha\}$, 作 $\bigcup_\alpha M_\alpha$, 显然 $\bigcup_\alpha M_\alpha$ 仍为 A 的正规子集合, 且 $\bigcup_\alpha M_\alpha$ 为 $\{M_\alpha\}$ 的上界. 由 Zorn 引理知 \mathcal{M} 必有一个极大元 B . 则 B 就是 A 的包含 x 的极大正规子集合. 由定理25知 B 是可交换的 B -代数, 且 $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$. 所以 B 满足定理24的条件. 所以存在 $y \in B$, 使 $y^2 = x$ 且 $y = y^*$. 定理得证.

顺便指出, 在一定的条件下, 对于 A 的子代数 B 有 $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$, 这比谱半径 $\rho_A(x) = \rho_B(x)$ 更有用. 若不可交换的 B -代数中包含着一个可交换的子代数, 保持谱不变, 往往可使在可交换的 B -代数中得到的结论, 在不可交换的 B -代数上也成立.

§ 4.8 不可交换的Banach代数

由前可知若在具有对合的不可交换的 B -代数 A 中, 可以作 A 的极大正规子集合 B , 则 B 是一个可交换的子代数. 本节研究在没有对合的情况下, 对不可交换的 B -代数, 如何作出一个可交换的子代数.

定义10 A 是 B -代数, 具有单元, S 是 A 的子集, 作

$$\Gamma(S) = \{x \in A \mid xs = sx, \forall s \in S\},$$

称 $\Gamma(S)$ 为 S 的换位子 (commutant) 或中心化子 (centralizer).

定理27 A 是 B -代数, 具有单元, $S \subset A$ 且 S 可交换, 则

(1) $B = \Gamma(\Gamma(S))$ 是 A 的可交换的子代数, 且 $B \supset S$.

(2) $\sigma_B(x) = \sigma_A(x), \forall x \in B$.

证 (1) 首先证明对 A 的任意子集 S , $\Gamma(S)$ 是 A 的闭子代数.

若 $x, y \in \Gamma(S)$, 对任意的 $s \in S$, 有

$$(x+y)s = xs + ys = sx + sy = s(x+y),$$

$$(xy)s = x(ys) = x(sy) = (xs)y = s(xy),$$

$$(\alpha x)s = \alpha(xs) = \alpha(sx) = s(\alpha x),$$

所以 $x+y \in \Gamma(S)$, $xy \in \Gamma(S)$, $\alpha x \in \Gamma(S)$.

若 $x_n \in \Gamma(S)$, 且 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$, 由 $x_n s = s x_n$, 得 $x s = s x$. 所以 $x \in \Gamma(S)$.

因此 $\Gamma(S)$ 是 A 的闭子代数, 又 $\Gamma(S) \subset A$, 所以 $\Gamma(\Gamma(S))$ 也是 A 的闭子代数.

再设 S 是可交换的, 证明 $\Gamma(\Gamma(S))$ 可交换.

因 S 可交换, 由 $\Gamma(S)$ 的定义知 $S \subset \Gamma(S)$. 又 $\Gamma(\Gamma(S))$ 中的元素和 $\Gamma(S)$ 中的元素可交换, 故一定和 S 中的元素可交换, 所以 $\Gamma(S) \supset \Gamma(\Gamma(S))$.

令 $C = \Gamma(S)$, 则 $C \supset \Gamma(C)$. 设 $x, y \in \Gamma(C)$, 则 $y \in C$. 由 $\Gamma(C)$ 的定义知, $x \in \Gamma(C)$ 则 $xy = yx$. 这说明 $\Gamma(C) = \Gamma(\Gamma(S)) = B$ 是可

交换的, 且显然 $B \supset S$.

(1) 得证.

(2) 与定理25中(2)的证明相同, 为证(2), 只需证明, 若 $y \in B$, $y^{-1} \in A$, 则 $y^{-1} \in B = \Gamma(\Gamma(S))$.

为此只需证明 y^{-1} 和 $\Gamma(S)$ 中的元素可交换. 由 $y \in B$ 知, 对一切 $z \in \Gamma(S)$ 有 $yz = zy$. 又 $z = y^{-1}yz = y^{-1}zy$, 所以 $zy^{-1} = y^{-1}z$. 即 $y^{-1} \in B$. 故 $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. 定理得证.

例 设 A 是 B -代数, 具有单元和对合, 设 $x \in A$ 是正规的, 即 $xx^* = x^*x$, 取 $S = \{x, x^*\}$, 则 S 是可交换的, 按定理26的证明中提到的方法, 可作包含 S 的极大正规子集合 B , 则 B 是 A 的一个可交换的闭子代数. 按定理27也可作 $\tilde{B} = \Gamma(\Gamma(S))$, 也是 A 的一个可交换的闭子代数, 由 $\Gamma(\Gamma(S))$ 的定义显然 $\tilde{B} \supset S$. 容易证明 $\tilde{B}^* = \tilde{B}$. 即 \tilde{B} 也是 A 的正规子集合.

由 $S^* = S$, 证明 $\Gamma(S) = \Gamma(S)^*$. 事实上 $x, x^* \in S$, 若 $y \in \Gamma(S)$, 则 $xy = yx$, $x^*y = yx^*$. 所以 $y^*x = (x^*y)^* = (yx^*)^* = xy^*$, 且 $y^*x^* = (xy)^* = (yx)^* = x^*y^*$, 这表明 $y^* \in \Gamma(S)$, 故 $\Gamma(S) = \Gamma(S)^*$. 因此也有 $\Gamma(\Gamma(S)) = \Gamma(\Gamma(S))^*$. 即 \tilde{B} 也是 A 的正规子集合, 但不一定为极大的.

定理28 设 A 是 B -代数, 具有单元, $x, y \in A$, 且 $xy = yx$, 则

$$\sigma(x+y) \subset \sigma(x) + \sigma(y),$$

$$\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y).$$

证 令 $S = \{x, y\}$, $B = \Gamma(\Gamma(S))$, 由定理27知

$$\sigma_B(z) = \sigma_A(z), \quad \forall z \in B.$$

所以 $\sigma(x+y) = \sigma_A(x+y) = \sigma_B(x+y)$, $\sigma(xy) = \sigma_A(xy) = \sigma_B(xy)$.

因此只需证明

$$\sigma_B(x+y) \subset \sigma_B(x) + \sigma_B(y),$$

$$\sigma_B(xy) \subset \sigma_B(x)\sigma_B(y).$$

由于 B 是可交换的 B -代数, $\sigma_B(z)$ 就是 Gelfand 变换 \hat{z} 的值域.

又

$$(x+y)^{\wedge} = \hat{x} + \hat{y}, \quad (xy)^{\wedge} = \hat{x} \hat{y},$$

所以立即得出所要结论.

推论 2 若 A 是 B -代数, 具有单元, L_x 和 R_x 分别表示用 x 左乘和右乘 A 中的元素, 即 $L_x, R_x \in B(A)$, $R_x y = yx$, $L_x y = xy$. 令 $C_x = R_x - L_x$, 则 $\sigma(C_x) \subset \sigma(x) - \sigma(x)$.

证 容易验证, 在 $B(A)$ 中 $R_x(-L_x) = -L_x R_x$, 由以上定理得 $\sigma(C_x) \subset \sigma(R_x) - \sigma(L_x)$. 但 $\sigma(R_x) = \sigma(x) = \sigma(L_x)$ (读者自己证明), 即得所证.

定理 29 A 是具有单元 e 的 B -代数, B 是 A 的闭子代数, $e \in B$, 若对于一切 $x \in B$, $\Omega_A = \mathbf{C} \setminus \sigma_A(x)$ 是连通的, 则 $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

证 $B \subset A$, 故 $\sigma_B(x) \supset \sigma_A(x)$. 令 $\Omega_B = \mathbf{C} \setminus \sigma_B(x)$, 则 $\Omega_B \subset \Omega_A$. $\sigma_A(x)$, $\sigma_B(x)$ 都是 \mathbf{C} 上的非空紧集, 所以 Ω_A 、 Ω_B 是开集. 又 $\Omega_A \cap \Omega_B$ 是非空开集, $\Omega_A \cap \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}}$ 是开集, 且 $\Omega_A \cap \Omega_B \subset \Omega_B$, $\Omega_A \cap \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}} \subset \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}}$, 故

$$(\Omega_A \cap \Omega_B) \cap (\Omega_A \cap \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}}) = \phi. \quad (12)$$

下面证明

$$\Omega_A = (\Omega_A \cap \Omega_B) \cup (\Omega_A \cap \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}}). \quad (13)$$

因为 $\Omega_A = (\Omega_A \cap \Omega_B) \cup (\Omega_A \cap \overline{\Omega_B}^{\mathbf{C}}) \cup (\Omega_A \cap (\overline{\Omega_B} - \Omega_B))$,

记 $\delta\Omega_B = \overline{\Omega_B} - \Omega_B$. 只需证明

$$\delta\Omega_B \cap \Omega_A = \phi \quad (14)$$

成立. 取 $\lambda \in \delta\Omega_B$, 则存在 $\lambda_n \in \Omega_B$, 使得 $\lambda_n \rightarrow \lambda$, 由 $\lambda_n \in \Omega_B$ 得 $x - \lambda_n e \in G_B$. 因 $\lambda \notin \Omega_B$ (Ω_B 为开集). 从而 $x - \lambda e \notin G_B$, 但 $x - \lambda_n e \rightarrow x - \lambda e$. 所以 $x - \lambda e \in \delta G_B$ (G_B 的边界). 若能证明

$$\delta G_B \cap G_A = \phi \quad (15)$$

成立, 则由 $x - \lambda e \in \delta G_B$ 得 $x - \lambda e \notin G_A$, 从而 $x - \lambda e \in \sigma_A(x)$. 即 $\lambda \notin \Omega_A$. 即 (14) 式成立.

现证(15)式成立. 用反证法. 取 $y \in \delta G_B \cap G_A$. 由于 $y \in \delta G_B$ 知存在 $y_n \in G_B$ 使得 $y_n \rightarrow y$. 因为 y_n^{-1} 、 y^{-1} 存在及映射 $y \rightarrow y^{-1}$ 的连续性, 知 $y_n^{-1} \rightarrow y^{-1}$. 故 $\{\|y_n^{-1}\| \mid n=1, 2, \dots\}$ 是有界的, 又

$$e - y_n^{-1}y = y_n^{-1}(y_n - y) \rightarrow 0,$$

所以存在 n , 使 $\|e - y_n^{-1}y\| < 1$. 所以 $e - (e - y_n^{-1}y) \in G_B$, 即 $y_n^{-1}y \in G_B$. 故 $y = y_n(y_n^{-1}y) \in G_B$. 与 $y \in \delta G_B$ 矛盾(G_B 是开集). (15)式得证.

由(12)、(13)式及 Ω_A 的连通性, 得

$$\Omega_A = \Omega_A \cap \Omega_B.$$

从而 $\Omega_A \subset \Omega_B$, 又由于 $\Omega_B \subset \Omega_A$, 所以 $\Omega_A = \Omega_B$. 定理得证.

下面利用以上事实研究 B^* -代数的性质.

定义11 在具有对合的 B -代数中, “ $x \geq 0$ ”是指 $x = x^*$, 且 $\sigma(x) \subset [0, \infty)$.

定理30 若 A 是 B^* -代数, 具有单元 e , 则 A 具有以下性质:

- (1) 若 $x \in A$, $x = x^*$, 则 $\sigma(x) \subset \mathbf{R}$,
- (2) 若 $x \in A$, $xx^* = x^*x$, 则 $\rho(x) = \|x\|$,
- (3) 若 $y \in A$, 则 $\rho(yy^*) = \|y\|^2$,
- (4) 若 $u \in A$, $v \in A$, $u \geq 0$, $v \geq 0$, 则 $u + v \geq 0$,
- (5) 若 $y \in A$, 则 $yy^* \geq 0$,
- (6) 若 $y \in A$, 则 $e + yy^* \in G_A$.

证 (1) $x \in A$, $x = x^*$, 则 $xx^* = x^*x$. 可作 A 的包含 $S = \{x, x^*\}$ 的极大正规子集 B , 由定理25知 B 是可交换的 B^* -代数, 且对一切 $y \in B$ 有 $\sigma_B(y) = \sigma_A(y)$. 再根据Gelfand-Naimark定理知, B 和 $\widehat{B} = C(\Delta_B)$ 是等距同构的, 且若 $x = x^*$, 则 $\widehat{x} = \widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$. 即 \widehat{x} 取实值. 又 $y \in B$, 则

$$\sigma(y) = \sigma_A(y) = \sigma_B(y) = \widehat{y}(\Delta_B),$$

所以 $\sigma(x) = \widehat{x}(\Delta_B) \subset \mathbf{R}$, (1)得证.

(2) $\rho(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$.

又 $xx^* = x^*x$, $\sigma(x) = \widehat{x}(\angle_B)$, 所以 $\rho(x) = \|\widehat{x}\|_\infty$, 又 B 与 \widehat{B} 是等距的, $\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\|_\infty$, 得 $\rho(x) = \|x\|$.

(3) 对一切 $y \in A$, yy^* 是自共轭的, 根据 (2) 得 $\rho(yy^*) = \|yy^*\|$, 又 A 是 B^* -代数, 得 $\rho(yy^*) = \|y\|^2$.

(4) 因为 $(u+v)^* = u^* + v^* = u+v$, 所以 $u+v$ 是自共轭的. 现只需证明 $\sigma(u+v) \subset [0, \infty)$.

记 $\alpha = \|u\|$, $\beta = \|v\|$, 由 $u \geq 0$ 知 $\sigma(u) \subset [0, \infty)$, 又若 $\lambda \in \sigma(u)$, 则 $|\lambda| \leq \|u\|$, 所以 $\sigma(u) \subset [0, \alpha]$. 注意到 ae 与 u 是可交换的, 所以

$$\sigma(ae-u) \subset \sigma(ae) + \sigma(-u) \subset [0, \alpha].$$

由 (2) 得 $\rho(ae-u) = \|ae-u\| \leq \alpha$.

同理有 $\rho(\beta e-v) = \|\beta e-v\| \leq \beta$.

令 $\gamma = \alpha + \beta$, $w = u+v$, 因

$$\gamma e - w = ae - u + \beta e - v, \text{ 所以}$$

$$\|\gamma e - w\| \leq \|ae - u\| + \|\beta e - v\| \leq \alpha + \beta = \gamma.$$

由此知 $\sigma(\gamma e - w) \subset [-\gamma, \gamma]$.

$$\sigma(w) = \sigma(\gamma e - (\gamma e - w)) \subset \sigma(\gamma e) - \sigma(\gamma e - w) \subset [0, 2\gamma],$$

所以 $w = u+v \geq 0$.

(5) 首先证明以下事实: 若 A 是 B 一代数, $x \in A$, $y \in A$, 则 $\sigma(yx) \subset \sigma(xy) \cup \{0\}$.

为此只需证明当 $\lambda \neq 0$ 时 $\lambda \in \sigma(yx) \iff \lambda \in \sigma(xy)$ 即可.

若存在 z 使得 $(e - xy)z = z(e - xy) = e$, 则

$$(e - yx)(e + yzx) = (e + yzx)(e - yx) = e.$$

事实上,

$$\begin{aligned} (e - yx)(e + yzx) &= e - yx + y(zx - xyzx) \\ &= e - yx + y(e - xy)zx = e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e + yzx)(e - yx) &= e - yx + y(zx - zxxyx) \\ &= e - yx + yz(e - xy)x = e. \end{aligned}$$

以上说明 $e - xy \in G_A \iff e - yx \in G_A$.

若 $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(yx) \iff \lambda e - yx \notin G_A$

$$\iff \lambda \left(e - \frac{1}{\lambda} yx \right) \notin G_A$$

$$\iff \lambda \left(e - \frac{1}{\lambda} xy \right) \notin G_A \iff \lambda \in \sigma(xy).$$

现在证明 $y \in A$, 则 $yy^* \geq 0$.

记 $x = yy^*$. 显然 $x = x^*$, 故可作 A 的包含 x 的极大正规子集 B , 则 \hat{x} 是 \angle_B 上的实值函数. 由

$$\sigma(x) = \sigma_B(x) = \hat{x}(\angle_B)$$

知, 只需证明在 \angle_B 上 $\hat{x} \geq 0$.

因为 $\hat{B} = C(\angle_B)$, 所以存在 $z \in B$ 使得 $\hat{z} = |\hat{x}| - \hat{x}$, 又 $\hat{z}^* = \overline{\hat{z}} = \hat{z}$, 得 $z = z^*$.

令 $w = zy = u + iv$, 其中 $u = u^*$, $v = v^*$, 则 $w^* = u - iv$, $w^*w = u^2 + iuv - ivu + v^2$, $ww^* = u^2 - iuv + ivu + v^2$.

于是 $w^*w + ww^* = 2u^2 + 2v^2$.

由第三章 § 3.9 谱映射定理知

$$\sigma(u^2) = (\sigma(u))^2 \subset [0, \infty),$$

且 $(u^2)^* = u^2$, 得 $u^2 \geq 0$. 同理 $v^2 \geq 0$. 所以 $2u^2 + 2v^2 \geq 0$.

$$ww^* = (zy)(zy)^* = zyy^*z = zxz.$$

又 $z \in B$, $x \in B$. 故 z 与 x 可交换, 所以

$$ww^* = z^2x.$$

又 z 与 x 都是自共轭的, 所以 z^2x 是自共轭的,

$$\hat{z}^2\hat{x} = (\hat{z})^2\hat{x} = (|\hat{x}| - \hat{x})^2\hat{x} \leq 0.$$

事实上, 若 $\hat{x} \leq 0$, 上式显然, 若 $\hat{x} > 0$, 则 $|\hat{x}| - \hat{x} = 0$. 于是得到 $-z^2x \geq 0$.

由(4)得 $w^*w = 2u^2 + 2v^2 + (-z^2x) \geq 0$. 又由于

$$\sigma(ww^*) \subset \sigma(w^*w) \cup \{0\} \subset [0, \infty),$$

所以 $ww^* \geq 0$, 即 $z^2x \geq 0$, 所以 $\widehat{z^2x} \geq 0$, 即 $(\widehat{z})^2 \widehat{x} \geq 0$. 所以 $\widehat{x} \geq 0$. (5)得证.

(6)由(5)知 $\sigma(yy^*) \subset [0, \infty)$, 故 $-1 \notin \sigma(yy^*)$, 所以 $e + yy^* \in G_A$. 证毕.

定理31 设 A 是 B^* -代数, 具有单元 e , B 是 A 的闭 \ast -子代数, $e \in B$, 则对一切 $y \in B$ 有

$$\sigma_B(y) = \sigma_A(y).$$

证 只需证明 $x \in B, x^{-1} \in A$, 则 $x^{-1} \in B$. $x^{-1} \in A$, 即 $x \in G_A$. 又 $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$, 所以 $x^* \in G_A$. 于是 $xx^* \in G_A$. 由 xx^* 的自共轭性知 $\sigma_A(xx^*) \subset [0, \infty)$. 又由 xx^* 的可逆性知, $0 \notin \sigma_A(xx^*)$. 故 $\sigma_A(xx^*) \subset (0, \infty)$. 所以 $\Omega = \mathbb{C} - \sigma_A(xx^*)$ 是单连通的, 由定理29知 $\sigma_A(xx^*) = \sigma_B(xx^*)$. 这表明 $xx^* \in G_B$. 所以 $(xx^*)^{-1} \in B$, 于是 $x^{-1} = x^*(xx^*)^{-1} \in B$. 定理得证.

§ 4.9 正泛函

定义12 A 是 B -代数, 具有单元和对合, F 是 A 上的线性泛函, 若对一切 $x \in A$ 有 $F(xx^*) \geq 0$, 则称 F 为正泛函.

定理32 A 是 B -代数, 具有单元 e ($\|e\| = 1$) 和对合. 则 A 上的正泛函 F 具有以下性质:

- (1) $F(x^*) = \overline{F(x)}$,
- (2) $|F(xy^*)|^2 \leq F(xx^*)F(yy^*)$,
- (3) $|F(x)|^2 \leq F(e)F(xx^*) \leq F(e)^2\rho(xx^*)$,
- (4) 若 $xx^* = x^*x$, 则 $|F(x)| \leq F(e)\rho(x)$.
- (5) F 是 A 上的有界线性泛函.

证 (1) 若 $x, y \in A, \alpha \in \mathbb{C}$, 则

$$0 \leq F((x + \alpha y)(x^* + \overline{\alpha} y^*)) = F(xx^* + \overline{\alpha} xy^* + \alpha yx^* + |\alpha|^2 yy^*).$$

令 $p=F(xx^*), q=F(yy^*), r=F(xy^*), s=F(yx^*)$. 则得

$$p + \bar{\alpha}r + \alpha s + |\alpha|^2 q \geq 0. \quad (16)$$

取 $\alpha = 1$, 得 $p + r + s + q \geq 0$, 又 $p \geq 0, q \geq 0$, 所以 $r + s \in R$.

取 $\alpha = i$ 得 $p - ir + is + q \geq 0$, 所以 $i(-r + s) \in R$. 设 $r = a + bi, s = c + di$. 由以上结论得

$$b + d = 0, -a + c = 0.$$

即 $s = \bar{r}$, 再取 $y = 1$, 即得

$$F(x^*) = \overline{F(x)}.$$

(2) 若 $r = F(xy^*) = 0$, 则(2)显然成立. 若 $r \neq 0$, 取 $\alpha = \frac{tr}{|r|}$, $t \in R$, 代入(16)式, 得 $p + 2t|r| + t^2 q \geq 0$ 对任何 $t \in R$ 成立. 故 $|r|^2 - pq \leq 0$, 即得(2)的结论.

(3) 在(2)中取 $y = e$, 得

$$|F(x)|^2 \leq F(e)F(xx^*).$$

为证第二个不等式, 令 $t > \rho(xx^*)$. 显然 $te - xx^* \in A$ 是自共轭的, 且 te 和 xx^* 可交换, 利用定理 28, 得 $\sigma(te - xx^*) \subset \sigma(te) - \sigma(xx^*)$. 因为 $\sigma(te) = t, \rho(xx^*) < t$, 所以 $\sigma(te - xx^*)$ 含于右半开平面, 由定理 26 知, 存在 $u \in A$, 使 $u = u^*$ 且 $u^2 = te - xx^*$, 所以

$$0 \leq F(uu^*) = F(u^2) = tF(e) - F(xx^*),$$

即 $F(xx^*) \leq tF(e)$

对一切 $t > \rho(xx^*)$ 成立. 所以

$$F(xx^*) \leq F(e)\rho(xx^*).$$

(4) $xx^* = x^*x$. 由定理 28 知 $\sigma(xx^*) \subset \sigma(x)\sigma(x^*)$, 于是 $\rho(xx^*) \leq \rho(x)\rho(x^*)$. 又 $\lambda \in \sigma(x)$ 当且仅当 $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$, 故 $\rho(x^*) = \rho(x)$. 由(3)得

$$|F(x)|^2 \leq F(e)^2 \rho(xx^*) \leq F(e)^2 \rho(x)^2.$$

即 $|F(x)| \leq F(e)\rho(x)$.

(5) 令 $A_r = \{x \in A \mid x = x^*\}$, 因 A 中有对合, 故任给 $x \in A$, 有

$x=u+iv$, 其中 $u=u^*$, $v=v^*$. 所以 $A=A_r+iA_r$. 易见 A_r 和 iA_r 是实数域上的线性空间.

令 $Y=\overline{A_r} \times i\overline{A_r}$, 在其上定义范数:

$$\|(a, ib)\| = \|a\| + \|b\|.$$

则 Y 为一个 Banach 空间. 将 A 也看成实数域上的线性空间, 定义映射 $\Lambda: Y \rightarrow A$ 如下.

$$\Lambda(a, ib) = a + ib,$$

则 Λ 是 Y 到 A 上的线性连续映射. 由开映射定理, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| < \delta$, 存在 $(u, iv) \in Y$, 使得 $\Lambda(u, iv) = x$, 且 $\|(u, iv)\| \leq 1$. 即

$$x = u + iv, \text{ 且 } \|u\| + \|v\| \leq 1.$$

任取 $x \in A$, $x \neq 0$, 考虑 $\frac{\delta}{\|x\|} x$, 则存在 $x_1, x_2 \in \overline{A_r}$, 使

得 $\frac{\delta}{\|x\|} x = x_1 + ix_2$, 且 $\|x_1\| + \|x_2\| \leq 1$. 即

$$x = \frac{\|x\|}{\delta} x_1 + i \frac{\|x\|}{\delta} x_2 = u + iv,$$

$$\text{且 } \|u\| + \|v\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$$

令 $\frac{1}{\delta} = \gamma$. 以上结论归纳为:

存在 $\gamma > 0$, 使得 A 中的每个元素 x 都可以表示为

$$x = x_1 + ix_2,$$

其中 $x_1, x_2 \in \overline{A_r}$, 且 $\|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma \|x\|$.

先证明泛函 F 的有界性. 若 $F(e) = 0$, 则由 (3) 知, 对一切 $x \in A$ 有 $F(x) = 0$. 故 F 有界. 因此我们假设 $F(e) \neq 0$. 不失一般性, 不妨假设 $F(e) = 1$. 今将 F 限制在 A_r 上, 记为 $F|_{A_r}$. 由于 A_r 中的元素是正规的, 由 (4) 知

$$|F(x)| \leq F(e)\rho(x) \leq F(e)\|x\|.$$

所以 $\|F|_{A_r}\| \leq F(e) = 1$, 又 $e \in A_r$, 所以 $\|F|_{A_r}\| = 1$. 即 $F|_{A_r}$

是范数为 1 的实线性泛函. 又 A_r 在 $\overline{A_r}$ 中稠密, 故可将 F 开拓到 $\overline{A_r}$ 上, 得到 $\overline{A_r}$ 上的泛函 Φ , 且 $\|\Phi\| = 1$.

现在证明, 若 $y \in \overline{A_r} \cap i\overline{A_r}$, 则 $\Phi(y) = 0$. 事实上, 若 $y \in \overline{A_r}$, 则存在 $u_n \in A_r$ 使得 $u_n \rightarrow y$. 又 $y \in i\overline{A_r}$, 则存在 $v_n \in A_r$ 使得 $iv_n \rightarrow y$. 所以 $u_n^2 \rightarrow y^2$, $v_n^2 \rightarrow -y^2$. 即 $u_n^2 + v_n^2 \rightarrow 0$.

由 (3) 得, $0 \leq |F(u_n)|^2 \leq F(e)F(u_n u_n^*) = F(u_n^2)$. 又 $F(v_n^2) = F(v_n v_n^*) \geq 0$. 所以 $0 \leq |F(u_n)|^2 \leq F(u_n^2) \leq F(u_n^2 + v_n^2)$. 再由 (4) 知, $0 \leq |F(u_n)|^2 \leq F(u_n^2 + v_n^2) \leq F(e)\rho(u_n^2 + v_n^2) \leq \|u_n^2 + v_n^2\| \rightarrow 0$,

于是得到
$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = 0.$$

又 $F(u_n) = \Phi(u_n)$ 且 $u_n \rightarrow y$. 故得 $\Phi(y) = 0$.

任给 $x \in A$, x 可表示为 $x = u + iv$, $u, v \in A_r$. 另一方面, 存在 $x_1, x_2 \in \overline{A_r}$ 使得 $x = x_1 + ix_2$ 且 $\|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma \|x\|$, 即 $x_1 + ix_2 = u + iv$. 或 $x_1 - u = i(v - x_2)$. 而 $x_1 - u \in \overline{A_r}$, $i(v - x_2) \in i\overline{A_r}$. 因此有 $x_1 - u \in \overline{A_r} \cap i\overline{A_r}$, $i(v - x_2) \in \overline{A_r} \cap i\overline{A_r}$. 所以 $\Phi(x_1 - u) = 0$, $\Phi(i(v - x_2)) = 0$. 即

$$F(u) = \Phi(u) = \Phi(x_1), \quad F(v) = \Phi(v) = \Phi(x_2).$$

最后得到

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq |F(u)| + |F(v)| = |\Phi(x_1)| + |\Phi(x_2)| \\ &\leq \|x_1\| + \|x_2\| \leq \gamma \|x\|, \end{aligned}$$

故 F 是有界的. 定理得证.

这个定理说明, 若 F 是正泛函, 则 F 一定是连续的.

推论 3 若 A 是可交换的, 则 $\|F\| = F(e)$.

证 任给 $x \in A$, 则 $xx^* = x^*x$, 由上定理中结论 (4) 知 $|F(x)| \leq F(e)\rho(x) \leq F(e)\|x\|$. 又 $|F(e)| = F(e)\|e\|$, 所以 $\|F\| = F(e)$.

推论 4 若对任意 $x \in A$ 有 $\|x^*\| \leq \beta \|x\|$, 则 $\|F\| \leq \beta^{1/2} F(e)$.

证 由上定理结论(3)知

$$|F(x)|^2 \leq F(e)^2 \rho(xx^*).$$

又 $\rho(xx^*) \leq \|xx^*\| \leq \|x\| \|x^*\| \leq \beta \|x\|^2$. 所以 $|F(x)| \leq F(e)\beta^{1/2} \|x\|$. 即

$$\|F\| \leq \beta^{1/2} F(e).$$

推论5 若 A 是 B^* -代数, 则 $\|F\| = F(e)$.

证 A 是 B^* -代数, 由定理30结论(3)知 $\rho(xx^*) = \|x\|^2$. 再根据定理32结论(3)得 $|F(x)|^2 \leq F(e)^2 \|x\|^2$. 即 $|F(x)| \leq F(e) \|x\|$. 故 $\|F\| = F(e)$.

定理33 若 A 是 B^* -代数. 具有单元 e , $z \in A$, 则必存在 A 上的正泛函 F , 使得 $F(e) = 1$, 且 $F(zz^*) = \|z\|^2$.

证 令 $A_r = \{x \in A \mid x = x^*\}$, 则 A_r 是实数域上的线性空间, A_r 也称为 A 的实部.

先在 A_r 上作正泛函, 然后再推广到 A 上. 令 $P = \{x \in A \mid x \geq 0\} = \{x \in A \mid x = x^*, \text{ 且 } \sigma(x) \subset [0, \infty)\}$. 显然 $P \subset A_r$, 且若 $u \in P$, $v \in P$, $c \geq 0$ 则 $u+v \in P$, $cu \in P$. 此时称 P 为一个锥形. 由定理30知, 对一切 $x \in A$, 有 $xx^* \in P$, $x^*x \in P$. 又 $e \in P$. 今在 A_r 上作一个线性泛函 f , 满足 $f(e) = 1$, 且对一切 $x \in P$, 有 $f(x) \geq 0$.

令 $M_0 = \{e, zz^*\} = \{ae + \beta zz^* \mid a, \beta \in \mathbb{R}\} \subset A_r$. 若 e 与 zz^* 线性无关, 则 M_0 是二维的, 否则 M_0 是一维的.

先定义 $f_0: M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ 如下:

$$f_0(ae + \beta zz^*) = a + \beta \|zz^*\|.$$

这样定义的 f_0 是有确切意义的. 事实上, 若 e 和 zz^* 线性无关, 则显然定义是唯一的. 若 zz^* 和 e 线性相关, 则存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $zz^* = ce$. 若 $ae + \beta zz^* = a'e + \beta' zz^*$, 则有 $a + \beta c = a' + \beta' c$. 故

$$f_0(ae + \beta zz^*) = a + \beta c = a' + \beta' c = f_0(a'e + \beta' zz^*).$$

显然 f_0 是实线性泛函, $f_0(e) = 1$, $f_0(zz^*) = \|zz^*\| = \|z\|^2$. 现在证明在 $P \cap M_0$ 上, $f_0 \geq 0$. 先证明 $\|zz^*\| \in \sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$. 因为 $zz^* \geq 0$. 故 $\sigma(zz^*) \subset [0, \infty)$. 又 zz^* 是自共轭元素,

可作 A 的包含 zz^* 的极大正规子集 B , B 是可交换的 \bullet -子代数, 所以 $\sigma(zz^*) = \widehat{zz^*}(\Delta)$. 由 Gelfand-Naimark 定理知 $\|\widehat{zz^*}\|_\infty = \|zz^*\|$. 又 zz^* 是紧 T_2 空间 Δ 上的连续函数, 故至少存在一个 $\varphi \in \Delta$, 使 $\widehat{zz^*}(\varphi)$ 达到其极大值. 即

$$\|\widehat{zz^*}(\varphi)\| = \|\widehat{zz^*}\|_\infty.$$

所以 $\|zz^*\| \in \sigma(zz^*)$.

再考虑 $\sigma(\alpha e + \beta zz^*)$. 因为 $\alpha e + \beta zz^*$ 是自共轭的, 故 $\alpha e + \beta zz^*$ 的值域就是 $\sigma(\alpha e + \beta zz^*)$. 又 $\alpha e + \beta zz^* = \widehat{\alpha e + \beta zz^*}$. 又存在 $\varphi \in \Delta$ 使 $\|\widehat{zz^*}(\varphi)\| = \|\widehat{zz^*}\|_\infty = \|zz^*\|$, 所以

$$\|(\alpha e + \beta zz^*)\varphi\| = \alpha + \beta \|zz^*\|.$$

即 $\alpha + \beta \|zz^*\| \in \sigma(\alpha e + \beta zz^*)$. 这表明, 若 $x \in M_0$, 则 $f_0(x) \in \sigma(x)$. 故若 $x_0 \in P \cap M_0$, 则 $f_0(x) \geq 0$.

现将 f_0 扩张到 A_r 上. 假设 f_0 已扩张为实线性泛函 $f_1: M_1 \rightarrow \mathbf{R}$. 即 $M_0 \subset M_1 \subset A_r$, 当 $x \in M_0$ 有 $f_1(x) = f_0(x)$, 而且在 $P \cap M_1$ 上, $f_1 \geq 0$. 若 $M_1 \neq A_r$, 设 $y \in A_r \setminus M_1$, 令 $M_2 = \langle M_1, y \rangle = \{x + \alpha y \mid x \in M_1, \alpha \in \mathbf{R}\}$, 今将 f_1 扩张为 M_2 上的线性泛函 f_2 . 定义 $f_2: M_2 \rightarrow \mathbf{R}$ 如下: f_2 为线性的, $f_2(x + \alpha y) = f_2(x) + \alpha f_2(y)$. 又 f_2 是 f_1 的扩张, 故 $f_2(x) = f_1(x)$. y 为一固定元素, 故 $f_2(y) = c$. 即定义 $f_2(x + \alpha y) = f_1(x) + \alpha c$. 现确定实数 c , 使得在 $P \cap M_2$ 上, $f_2 \geq 0$.

令 $E' = M_1 \cap (y - P)$, $E'' = M_1 \cap (y + P)$. 取 $x' \in E'$, $x'' \in E''$, 则 $x' = y - p$, $p \in P$, $x'' = y + q$, $q \in P$. 又 P 是锥, 故 $(y - x') + (x'' - y) = p + q = x'' - x' \in P$. 又 $x', x'' \in M_1$, 而 M_1 是子空间, 故 $x'' - x' \in M_1$, 所以 $x'' - x' \in P \cap M_1$. 因此 $f_1(x'' - x') \geq 0$, 即 $f_1(x') \leq f_1(x'')$. 这意味着, $x' \in E'$, $f_1(x')$ 有上界, $x'' \in E''$, $f_1(x'')$ 有下界, 且 $\sup_{x' \in E'} f_1(x') \leq \inf_{x'' \in E''} f_1(x'')$. 故存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得

$$f_1(x') \leq c \leq f_1(x''), \quad \forall x' \in E', x'' \in E''.$$

取这个 c 作为 $f_2(y)$ 的值. 即定义 $f_2(x + \alpha y) = f_1(x) + \alpha c$. 现在证明这样定义的 f_2 , 在 $M_2 \cap P$ 上一定有 $f_2 \geq 0$. 若 $x + y \in P$, 则 $-x \in$

$y-P$, 故 $-x \in (y-P) \cap M_1 = E'$. 所以 $f_2(-x) = f_1(-x) \leq c$. 即 $f_2(x) \geq -c$. 由此知

$$f_2(x+y) \geq -c + f_2(y) = -c + c = 0.$$

若 $x-y \in P$, 则 $x \in y+P$, 故 $x \in (y+P) \cap M_1 = E''$. 所以 $f_2(x) = f_1(x) \geq c$. 所以

$$f_2(x-y) \geq c - f_2(y) = c - c = 0.$$

即若 $x+y \in P$ 则 $f_2(x+y) \geq 0$, 若 $x-y \in P$, 则 $f_2(x-y) \geq 0$.

任取 $x+\alpha y \in P \cap M_2$, 若 $\alpha > 0$, 则 $x+\alpha y = \alpha \left(\frac{1}{\alpha}x + y \right)$,

$$f_2(x+\alpha y) = \alpha f_2 \left(\frac{1}{\alpha}x + y \right) \geq 0. \text{ 若 } \alpha < 0, \text{ 则 } x+\alpha y =$$

$$- \alpha \left(-\frac{1}{\alpha}x - y \right), f_2(x+\alpha y) = -\alpha f_2 \left(-\frac{1}{\alpha}x - y \right) \geq 0. \text{ 若 } \alpha = 0,$$

$f_2(x+\alpha y) = f_2(x) = f_1(x) \geq 0$. 因此, 在 $P \cap M_2$ 上, $f_2 \geq 0$.

以上事实说明, 定义在 M_0 上的线性泛函 f_0 , 满足在 $P \cap M_0$ 上 $f_0 \geq 0$, 若能扩张到 M_1 上, 而 $M_1 \neq A_r$. 即 M_1 外还有元素 y , 则由 y 与 M_1 作成子空间 M_2 , 必可将 f_0 再扩张到 M_2 上, 得 f_2 , 且在 $P \cap M_2$ 上, $f_2 \geq 0$.

再考虑 $f_\alpha: M_\alpha \rightarrow R$, 其中 $M_0 \subset M_\alpha \subset A_r$, f_α 满足以下两个条件:

$$f_\alpha|_{M_0} = f_0,$$

在 $P \cap M_\alpha$ 上, $f_\alpha \geq 0$.

研究集合 $\mathcal{M} = \{f_\alpha, M_\alpha\}$, 则按集合 M_α 的包含关系, \mathcal{M} 为一半

序集. 在 \mathcal{M} 中任取一个链 $\{f_\alpha', M_\alpha'\}$, 令 $M = \bigcup_{\alpha'} M_\alpha'$. 由于 M_α'

的包含关系 M 仍为一子空间, 则得定义在 M 上的线性泛函 f , (f, M) 即为链 $\{f_\alpha', M_\alpha'\}$ 的上界. 且显然泛函 f 满足 $f|_{M_0} = f_0$, 且在 $P \cap M$ 上 $f \geq 0$. 由 Zorn 引理, \mathcal{M} 必有一极大元素, 于是得到定义在 A_r 上的实线性泛函 $f: A_r \rightarrow R$ 使得 $f|_{M_0} = f_0$, 在 $P \cap A_r$ 上 $f \geq 0$. 于

是 $f(e) = f_0(e) = 1$, $f(zz^*) = f_0(zz^*) = \|z\|^2$.

最后再作 A 上的线性泛函. 若 $x \in A$, 则 $x = u + iv$, $u, v \in A_r$.
定义 $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ 如下:

$$F(x) = f(u) + if(v).$$

则显然 F 满足 $F(x+y) = F(x) + F(y)$, 且对 $\alpha \in \mathbb{R}$ 有 $F(\alpha x) = \alpha F(x)$.
再证明 $F(ix) = iF(x)$. 事实上,

$$\begin{aligned} F(ix) &= F(-v + iu) = f(-v) + if(u) \\ &= if(u) - f(v) = iF(x), \end{aligned}$$

即 F 是复数域上的线性泛函, 且当 $x \in P$ 有 $F(x) = F(x + i0) = f(x) \geq 0$. 即 F 为正泛函. 显然

$$F(e) = f(e) = 1, F(zz^*) = f(zz^*) = \|z\|^2. \text{ 定理得证.}$$

定理34 A 是 B^* -代数, 具有单元 e ($\|e\| = 1$), 若 $u \in A$, $u \neq 0$, 则存在 Hilbert 空间 H_u 及 A 到 $B(H_u)$ 的同态映射 T_u , 满足

- (1) $T_u(e) = 1$,
- (2) $T_u(x^*) = T_u(x)^*$, $x \in A$,
- (3) $\|T_u(x)\| \leq \|x\|$, $x \in A$,
- (4) $\|T_u(u)\| = \|u\|$.

证 由定理33知, 存在 A 上的正泛函 F , 使得 $F(e) = 1$, $F(u^*u) = \|u\|^2$.

对于 $a, b \in A$ 定义 $\langle a, b \rangle = F(b^*a)$. 显然 $\langle a, b \rangle$ 关于 a 为线性的, 关于 b 为共轭线性的, 且由定理32知 $\langle b, a \rangle = \overline{\langle a, b \rangle}$, 故 $\langle a, b \rangle$ 为 A 上的半内积.

令 $Y = \{y \in A \mid \langle y, y \rangle = 0\}$. 易证 Y 是 A 的闭子空间. 事实上, 若 $y_1, y_2 \in Y$, 有

$$\begin{aligned} \langle y_1 + y_2, y_1 + y_2 \rangle &= \langle y_1, y_1 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_2, y_1 \rangle + \langle y_2, y_2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

利用定理32中(2)知

$$0 \leq |\langle y_1, y_2 \rangle|^2 \leq \langle y_1, y_1 \rangle \langle y_2, y_2 \rangle = 0.$$

同理 $\langle y_2, y_1 \rangle = 0$. 故 $\langle y_1 + y_2, y_1 + y_2 \rangle = 0$, 即 $y_1 + y_2 \in Y$.

若 $y \in Y$, $a \in C$, 则 $\langle ay, ay \rangle = \overline{a}a \langle y, y \rangle = 0$. 所以 $ay \in Y$.
再证 Y 是闭的. 设 $y_n \in Y$, 且 $y_n \rightarrow y_0$, 由 $\langle y_n, y_n \rangle = 0$ 及正泛函的连续性(定理32中(5))得 $y_0 \in Y$. 即 Y 为 A 的闭子空间.

作 $A/Y = \{ \dot{a} = a + Y \mid a \in A \}$, A/Y 为线性空间, 在其上定义内积

$$\langle \dot{a}, \dot{b} \rangle = \langle a, b \rangle = F(b^*a).$$

这样定义的内积是有意义的. 事实上, 若 $\dot{a} = \dot{a}_1$, $\dot{b} = \dot{b}_1$, 则 $a_1 = a + y$, $b_1 = b + y'$, 故

$$\langle \dot{a}_1, \dot{b}_1 \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle = \langle a + y, b + y' \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, y' \rangle + \langle y, b \rangle + \langle y, y' \rangle.$$

由定理32中(2)知 $\langle a, y' \rangle = \langle y, b \rangle = \langle y, y' \rangle = 0$. 所以

$$\langle \dot{a}_1, \dot{b}_1 \rangle = \langle a, b \rangle = \langle \dot{a}, \dot{b} \rangle.$$

因此 A/Y 是一个内积空间, 其范数为 $\| \dot{a} \| = F(a^*a)^{1/2}$. 将 A/Y 完备化即得我们所需要的 Hilbert 空间 H_* .

容易验证 Y 是 A 中的左理想, 意即 $x \in A$, $y \in Y$, 则 $xy \in Y$.
事实上, $y \in Y$, 则 $\langle y, y \rangle = 0$. 而

$$0 \leq \langle xy, xy \rangle = F(y^*x^*xy) = \langle y, y^*xy \rangle \leq \langle y, y \rangle \langle x^*xy, x^*xy \rangle = 0.$$

所以 $\langle xy, xy \rangle = 0$, 即 $xy \in Y$.

下面定义 A/Y 到 H_* 的映射. 对于每一个 $x \in A$, 定义 $s(x): A/Y \rightarrow H_*$ 如下:

$$s(x) \dot{a} = (x \dot{a}).$$

注意到 Y 是左理想, 这样的定义是有意义的. 因为若 $\dot{a}_1 = \dot{a}$, 即 $a_1 = a + y$, $y \in Y$, 则

$$s(x) \dot{a}_1 = (x \dot{a}_1) = (x(a + y)) = (xa + xy) = (xa) = s(x) \dot{a}.$$

现证明 $s(x)$ 是有界线性算子. 容易验证 $s(x)$ 是线性的.

$$s(x)(\dot{a} + \dot{b}) = (x(\dot{a} + \dot{b})) = (x \dot{a}) + (x \dot{b})$$

$$= s(x) \dot{a} + s(x) \dot{b},$$

$$s(x)(\alpha \dot{a}) = \{x(\dot{\alpha}a)\} = \alpha(x \dot{a}) = \alpha s(x) \dot{a}.$$

再证 $s(x)$ 的有界性.

$$\|s(x) \dot{a}\|^2 = \|(x \dot{a})\|^2 = \langle x \dot{a}, x \dot{a} \rangle = \langle x \dot{a}, x \dot{a} \rangle = F(a^* x^* x a).$$

考虑泛函 $G(x) = F(a^* x^* x a)$, 则 $G(x)$ 是线性的, 由 $G(x^* x) = F(a^* x^* x a) = \|s(x) \dot{a}\|^2 \geq 0$ 知 $G(x)$ 是正泛函.

$$F(a^* x^* x a) = |G(x^* x)| \leq G(e) \|x^* x\| = G(e) \|x\|^2.$$

(根据定理32)

$$\text{即 } \|s(x) \dot{a}\|^2 \leq F(a^* a) \|x\|^2 = \|\dot{a}\|^2 \|x\|^2.$$

所以 $\|s(x)\| \leq \|x\|$.

$s(x)$ 是 $A/Y \rightarrow H_*$ 的有界线性算子, 由于 A/Y 在 H_* 中稠密, 故可将 $s(x)$ 唯一地扩张为 H_* 到 H_* 的映射 $T_*(x)$. 即 $T_*(x) \in B(H_*)$, 且 $\|T_*(x)\| \leq \|x\|$. 即得(3).

这样, 对每一个 $x \in A$, 相应的有 $T_*(x) \in B(H_*)$, 且 $\|T_*(x)\| \leq \|x\|$, 这个 $x \rightarrow T_*(x)$ 的对应显然是代数同态.

又 $T_*(e) \dot{a} = e \dot{a} = \dot{a}$, 故 $T_*(e) = I$, 即(1)得证.

再证(2). 若 $\dot{a}, \dot{b} \in A/Y$, 则

$$\begin{aligned} \langle T_*(x^*) \dot{a}, \dot{b} \rangle &= \langle x^* \dot{a}, \dot{b} \rangle = \langle x^* \dot{a}, \dot{b} \rangle = F(b^* x^* a) \\ &= \langle a, x b \rangle = \langle \dot{a}, x \dot{b} \rangle = \langle \dot{a}, T_*(x) \dot{b} \rangle = \langle T_*(x)^* \dot{a}, \dot{b} \rangle. \end{aligned}$$

所以 $T_*(x^*) = T_*(x)^*$,

这表明 $x \rightarrow T_*(x)$ 保持对合. 又

$$\begin{aligned} \|T_*(u)\|^2 &\geq \|T_*(u) \dot{e}\|^2 = \|\dot{u} e\|^2 \\ &= \|\dot{u}\|^2 = \langle u, u \rangle = F(u^* u) = \|u\|^2. \end{aligned}$$

再由 $\|T_*(x)\| \leq \|x\|$ 得 $\|T_*(u)\| = \|u\|$. 即得(4). 定理得证.

定理35 设 A 是 B^* -代数, 具有单元 e ($\|e\| = 1$), 则存在一个从 A 到 $B(H)$ 的闭子代数上的等距*一同构. 其中 H 为适当选取的Hilbert空间.

证 令 H 是定理34中的所构造的Hilbert空间 H_u 的直和. 即

$$H = \{v \in \prod_{u \in A} H_u \mid \sum_u \|\pi_u v\|^2 < \infty\}.$$

其中 $\pi_u v$ 为 v 在 H_u 上的坐标, $\|\pi_u v\|$ 表示 H_u -范数.

在 H 上定义内积

$$(v_1, v_2) = \sum_u \langle \pi_u v_1, \pi_u v_2 \rangle, \quad v_1, v_2 \in H.$$

则
$$\|v\| = \left[\sum_u \|\pi_u v\|^2 \right]^{1/2}.$$

容易验证 H 是Hilbert空间(读者自证).

对每一个 $x \in A$, 令 $T(x)$ 是 $H \rightarrow H$ 映射, 它在 H_u 上的坐标按下式定义:

$$\pi_u(T(x)v) = T_u(x)(\pi_u v), \quad v \in H.$$

其中 $T_u(x)$ 由定理34给出.

$$\|T_u(x)(\pi_u v)\| \leq \|\pi_u v\| \|T_u(x)\| \leq \|\pi_u v\| \|x\|.$$

$$\|T(x)v\|^2 = \sum_u \|\pi_u(T(x)v)\|^2$$

$$\leq \left(\sum_u \|\pi_u v\|^2 \right) \|x\|^2 = \|v\|^2 \|x\|^2.$$

所以 $\|T(x)\| \leq \|x\|.$

另一方面, 取 $v \in H$ 满足

$$\pi_u v = \begin{cases} 0, & u \neq x, \\ \dot{e}, & u = x \end{cases} \quad (\dot{e} \text{ 为 } H_x \text{ 中的单元}).$$

则

$$\pi_u(T(x)v) = T_u(x)(\pi_u v) = \begin{cases} 0, & u \neq x, \\ T_x(x)\dot{e}, & u = x, \end{cases}$$

又 $\|T_x(x)\dot{e}\| = \|\dot{x}e\| = \|\dot{x}\| = \|x\|$,

即对所取的 v 有 $\|T(x)v\| = \|x\|$, 又 $\|v\| = 1$. 所以 $\|Tx\| \geq \|x\|$. 因此有 $\|Tx\| = \|x\|$.

再由于 T_x 保持代数运算, 保持对合, 所以 T 是 A 到 $B(H)$ 的等距*一同构, 证毕.

这个定义说明, 每个 B^* -代数, 都是某个Hilbert空间上有界线性算子的闭*—子代数.

定义13 设 X 是线性空间, $C \subset X$ 是凸集, 若凸集 $B \subset C$ 具有以下性质:

若 $x \in C$, $y \in C$, $0 < t < 1$, 且 $tx + (1-t)y \in B$, 则 $x \in B$, $y \in B$. 则称 B 为 C 的极子集.

若 C 的极子集只含一点 p , 则称 p 为极点(*extreme point*). 即若 $x \in C$, $y \in C$, $0 < t < 1$, 使得 $p = tx + (1-t)y$, 则必有 $x = y = p$.

定理36 A 是可交换的 B^* -代数, 具有单元 e 和对合, 设 K 是 A 上所有正泛函 F 的集合, 且 F 满足 $F(e) \leq 1$ ($F(e) = \|F\|$), Δ 是 A 上所有非零代数同态的集合, 若 $\hat{x}^* = \overline{\hat{x}}$ ($x \in A$). 则 K 的极点集合 $\text{ext}K$ 与 $\Delta \cup \{0\}$ 等同, 即 $\text{ext}K = \Delta \cup \{0\}$.

证 首先指出 K 是凸集, 因为若 $F, G \in K$, 令 $h = tF + (1-t)G$, 其中 $0 < t < 1$, 显然 h 为正泛函. 又 $F(e) \leq 1$, $G(e) \leq 1$. 而 $h(e) = tF(e) + (1-t)G(e) \leq t + (1-t) \leq 1$, 所以 $h \in K$. 故 K 为凸集.

又显然 $0 \in \text{ext}K$. 因为若 $0 = tF + (1-t)G$, 则必有 $F = 0$, $G = 0$.

记 A 的根为 N , 即 $N = \{x \in A \mid \hat{x} = 0\}$. 若 $F \in K$, 则必有 $F|_N = 0$. 因为若 $x \in N$, 则 $\hat{x} = 0$. 又 $F(x) \leq F(e)\rho(x)$, 而 $\rho(x) =$

$\|\hat{x}\|_{\infty} = 0$, 故 $F(x) = 0$.

今定义 $\hat{F}: \hat{A} \rightarrow C$ 为 $\hat{F}(\hat{x}) = F(x)$. 由 $F|_N = 0$ 知, 以上定义是有确切意义的. 事实上, 若 $\hat{y} = \hat{x}$, 则 $y - x \in N$. 于是 $F(x) = F(y)$, 即 $\hat{F}(\hat{x}) = \hat{F}(\hat{y})$.

$\hat{A} \subset C(\mathcal{A})$. 由 $\hat{x}^{\bullet} = \overline{\hat{x}}$ 知. 若 $\hat{x} \in \hat{A}$, 则 $\overline{\hat{x}} \in \hat{A}$. 即 \hat{A} 是自共轭的. 又 $\hat{e} \in \hat{A}$ 同时 \hat{A} 可分离点, 即若 $\varphi \neq \psi$, $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$, 则必有 \hat{x} 使 $\hat{x}(\varphi) \neq \hat{x}(\psi)$. 由 Stone-Weierstrass 定理知子代数 \hat{A} 在 $C(\mathcal{A})$ 中是稠密的. 又

$$|\hat{F}(\hat{x})| = |F(x)| \leq F(e)\rho(x) \leq \|x\|_{\infty}.$$

所以 $\|\hat{F}\| \leq 1$.

$x \rightarrow \hat{x}$ 保持所有代数运算, 故 \hat{F} 是线性的. 即 \hat{F} 是子代数 \hat{A} 上的有界线性泛函, 故可以将 \hat{F} 扩张到 $C(\mathcal{A})$ 上; 于是由 Riesz 表示定理知, 存在着 \mathcal{A} 上的正则 Borel 测度 μ , 使得

$$\hat{F}(\hat{x}) = \int_{\mathcal{A}} \hat{x} d\mu,$$

且 $\|\mu\| = \|\hat{F}\|$. 即 $F(x) = \hat{F}(\hat{x}) = \int_{\mathcal{A}} \hat{x} d\mu$.

又 $\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} 1 \cdot d\mu = \int_{\mathcal{A}} \hat{e} d\mu = \hat{F}(\hat{e}) = F(e) = \|F\|$,

$$|\hat{F}(\hat{x})| = |F(x)| \leq F(e)\rho(x) = F(e)\|\hat{x}\|_{\infty}.$$

所以 $\|\hat{F}\| \leq F(e)$. 又 $\|\hat{F}\| \geq |\hat{F}(\hat{e})| = F(e)$, 所以

$$\|\hat{F}\| = \|F\| = F(e).$$

于是得 $\mu(\mathcal{A}) = \|\hat{F}\| = \|\mu\|$. 即 $\mu \geq 0$, μ 为正的 正则 Borel 测度.

记 M 为 \mathcal{A} 上所有 正的 正则 Borel 测度 μ 的集合, 且 $\|\mu\| \leq 1$ (即

$\mu(\Delta) \leq 1$). 以上利用stone-weierstrass定理和Riesz表示定理知, 对于每一个 $F \in K$, 存在唯一的 $\mu \in M$, 使得

$$F(x) = \int_{\Delta} \hat{x} d\mu, \text{ 且 } \|\mu\| = \|F\|.$$

反之, 由 $\mu \in M$, 定义

$$F(x) = \int_{\Delta} \hat{x} d\mu.$$

显然 F 是线性的, 且

$$F(x \cdot x) = \int_{\Delta} x \cdot \hat{x} d\mu = \int_{\Delta} \hat{x} \cdot \hat{x} d\mu = \int_{\Delta} \overline{\hat{x}} \hat{x} d\mu = \int_{\Delta} |\hat{x}|^2 d\mu \geq 0,$$

即 F 为正泛函, 所以

$$\|F\| = F(e) = \mu(\Delta) = \|\mu\| \leq 1,$$

故 $F \in K$.

以上讨论表明 K 与 M 是 1-1 对应的, 且保持代数运算. 即若 $\mu_1, \mu_2 \in M$, $F_1, F_2 \in K$, 且 $\mu_1 \leftrightarrow F_1$, $\mu_2 \leftrightarrow F_2$, 则 $\alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \leftrightarrow \alpha F_1 + \beta F_2$. 故若 $\mu \in \text{ext} M$ 且 $\mu \leftrightarrow F$, 则 $F \in \text{ext} K$. 这是因为 $\mu \leftrightarrow F$, $\gamma \leftrightarrow G$ 则 $\alpha\mu + (1-\alpha)\gamma \leftrightarrow \alpha F + (1-\alpha)G$. 又显然 $0 \in \text{ext} M$. 事实上, 若 $\mu_1, \mu_2 \in M$, $0 = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$, 则必有 $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

令 δ_{φ} 表示集中在一点 φ 上的测度, 即

$$\delta_{\varphi}(w) = \begin{cases} 0, & \varphi \notin w, \\ 1, & \varphi \in w. \end{cases}$$

则若 $\mu \in \text{ext} M$, 必有 $\varphi \in \Delta$, 使得 $\mu = \delta_{\varphi}$. 因为若不然, 则可将 Δ 分成 w' 和 w'' 两部分, 使得 $\mu(w') > 0$, $\mu(w'') > 0$, μ 可表示为 w' , w'' 上 μ 的线性组合, 与 $\mu \in \text{ext} M$ 矛盾. 又若 $\mu = \lambda\delta_{\varphi}$, $\lambda < 1$. 则有

$$\mu = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\delta_{\varphi},$$

所以 $\mu \notin \text{ext} M$. 这表明若 $\mu \in \text{ext} M$, 则有 $\mu = \delta_{\varphi}$.

反之, 显然 $\delta_r \in \text{ext} M$. 所以

$$\text{ext}M = \{0\} \cup \{\delta_\varphi \mid \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

又 $\delta_\varphi \longleftrightarrow F(x) = \int_A \hat{x} \, d\mu_\varphi = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$. 所以

$$\text{ext}M = \{0\} \cup \mathcal{A}. \quad \text{定理得证.}$$

定理37 A 是可交换的 B -代数, 具有单元和对合, K 是 A 上所有正泛函 F 的集合, 满足 $F(e) \leq 1$. 若 $F \in K$, 则下列各命题是等价的:

- (1) $F(xy) = F(x)F(y), \forall x, y \in A.$
- (2) $F(xx^*) = F(x)F(x^*), \forall x \in A.$
- (3) $F \in \text{ext}K,$
- (4) $F(x^*xy) = F(x^*x)F(y), \forall x, y \in A.$

证 (1) \rightarrow (2) 是显然的.

(2) \rightarrow (3).

$F(xx^*) = F(x)F(x^*)$, 所以 $F(e) = F(e)^2$, 即或者 $F(e) = 0$, 或者 $F(e) = 1$.

若 $F(e) = 0$. 由于 $\|F\| = F(e) = 0$, 故 $F = 0$. 所以 $F \in \text{ext}K$.

若 $F(e) = 1$. 令 $F = \frac{F_1 + F_2}{2}$, $F_1, F_2 \in K$. 又 $F_1(e) \leq 1$,

$F_2(e) \leq 1$, 且 $F(e) = 1$, 故有 $F_1(e) = 1$. 现在证明, 若 $F(x) = 0$, 则 $F_1(x) = 0$. $|F_1(x)|^2 \leq F_1(e)F_1(x^*x)$, $F_1(x^*x) + F_2(x^*x) = 2F(x^*x)$. 又 $F_2(x^*x) \geq 0$. 所以 $F_1(x^*x) \leq 2F(x^*x)$. 故

$$|F_1(x)|^2 \leq F_1(x^*x) \leq 2F(x^*x) = 2F(x^*)F(x).$$

因此 $F_1(x) = 0$.

因为 $F(y - F(y)e) = 0$, 故 $F_1(y - F(y)e) = 0$, 即对一切 y 有 $F_1(y) = F(y)$. 同理可证 $F_2(y) = F(y)$. 所以 $F \in \text{ext}K$.

(3) \rightarrow (4).

设 $x \in A$ 满足 $\|x^*x\| < 1$, 则 $e - x^*x = 1 - x^*x$. 因为 $\|x^*x\|$

< 1 , 则 $\widehat{x^*x}$ 的值域 $\widehat{x^*x}(\mathcal{A})$ 在单位圆内, 故 $\sigma(e - x^*x) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, 又 $e - x^*x$ 是自共轭的, 由定理26知, 存在 $z \in A$, 使得 $z = z^*$ 且 $z^2 = e - x^*x$.

今在 A 上定义 Φ : $\Phi(y) = F(x^*xy)$. $\Phi(y)$ 显然是线性泛函, 且由于 A 是可交换的, 有

$$\Phi(y^*y) = F(x^*xy^*y) = F((xy)^*xy) \geq 0.$$

故 Φ 为正泛函. 若 $\Phi(e) = 0$, 即 $\|\Phi\| = 0$, 则 $\Phi = 0$, 于是 $F(x^*xy) = \Phi(y) = 0$, $F(x^*x) = \Phi(e) = 0$. 此时 $F(x^*xy) = F(xx^*)F(y)$ 显然成立.

若 $\Phi(e) > 0$, 得 $0 < \Phi(e) = F(x^*x) \leq F(e)\rho(x^*x)$. 又由 $F \in \text{ext}K$ 知, 必有 $F(e) = 0$ 或 $F(e) = 1$, 因为若 $F(e) = \alpha < 1$, 取 $G = \frac{F}{\alpha}$, 则 $G(\alpha) = 1$, 即 $G \in K$, 于是 $F = (1 - \alpha) \cdot 0 + \alpha G$, 与 F 是极点矛盾.

若 $F(e) = 0$, 即 $\|F\| = 0$, 故 $F = 0$, 此时(4)显然成立. 若 $F(e) = 1$, 则

$$0 < \Phi(e) \leq F(e)\rho(xx^*) = \rho(xx^*) \leq \|x^*x\| < 1.$$

研究泛函 $F - \Phi$.

$$\begin{aligned} (F - \Phi)(y^*y) &= F(y^*y) - F(x^*xy^*y) = F(e - x^*x)y^*y \\ &= F(z^2y^*y) = F(z^*zy^*y) = F((yz)^*yz) \geq 0, \end{aligned}$$

所以 $F - \Phi$ 为正泛函. 又 $F(e) = 1$, $0 < \Phi(e) < 1$, 所以 $0 < (F - \Phi)e < 1$. 于是

$$F = \Phi(e) \frac{\Phi}{\Phi(e)} + (F - \Phi)(e) \frac{F - \Phi}{(F - \Phi)(e)},$$

又 $\frac{\Phi}{\Phi(e)} \in K$, $\frac{F - \Phi}{(F - \Phi)(e)} \in K$, 且 $F \in \text{ext}k$, 所以得

$$F = \frac{\Phi}{\Phi(e)}.$$

即 $\Phi(y) = \Phi(e)F(y)$. 也就是 $F(x^*xy) = F(x^*x)F(y)$.

最后, 若取消 $\|x^{\circ}x\| < 1$ 的限制, 证明仍成立. 因为若

$\|x^{\circ}x\| = a$, 只需考虑 $F\left(\frac{x^{\circ}x}{a}y\right)$ 即可.

(4) \longrightarrow (1).

记 $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$. 若 $x \in A$, 令 $z_p = e + \omega^{-p}x$ ($p=1, 2, 3$),
则 $z_p^{\circ} = (e + \omega^{-p}x)^{\circ} = e + \omega^p x^{\circ}$,

$$z_p^{\circ} z_p = e + \omega^p x^{\circ} + \omega^{-p} x + x^{\circ} x,$$

$$\omega^p z_p^{\circ} z_p = \omega^p + \omega^{2p} x^2 + x + \omega^p x^{\circ} x.$$

又 $\sum_{p=1}^3 \omega^p = 0$, $\sum_{p=1}^3 \omega^{2p} = 0$, 所以得 $\sum_{p=1}^3 \omega^p z_p^{\circ} z_p = 3x$. 即

$$x = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 \omega^p z_p^{\circ} z_p. \text{ 由 (4) 知}$$

$$F(xy) = F\left(\frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 \omega^p z_p^{\circ} z_p y\right) = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 \omega^p F(z_p^{\circ} z_p y)$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 \omega^p F(z_p^{\circ} z_p) F(y) = F\left(\frac{1}{3} \sum_{p=1}^3 \omega^p z_p^{\circ} z_p\right) F(y)$$

$$= F(x) F(y).$$

定理得证.

第五章 正规算子的谱分解

§ 5.1 单位分解

定义 1 设 \mathcal{M} 是集合 Ω 上的 σ -代数, H 是 Hilbert 空间, $B(H)$ 是 H 上有界线性算子构成的 Banach 代数, 若映射 $E: \mathcal{M} \rightarrow B(H)$ 满足

$$(1) E(\phi) = 0, E(\Omega) = I,$$

$$(2) E(\omega) \text{ 是自共轭射影算子, } \forall \omega \in \mathcal{M},$$

$$(3) E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega''), \forall \omega', \omega'' \in \mathcal{M},$$

$$(4) \text{ 若 } \omega' \cap \omega'' = \phi, \text{ 则 } E(\omega' \cup \omega'') = E(\omega') + E(\omega'').$$

$$(5) \text{ 对于任意的 } x, y \in H, \text{ 由下式定义的集合函数 } E_{x,y}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$E_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y)$$

是 \mathcal{M} 上的复测度,

则称 E 为 (\mathcal{M} 上) 一个单位分解.

分析以上定义, 需讨论以下几个事实.

(1°) 定义中 (3) 与 (2) 不矛盾, 需证明 $E(\omega')E(\omega'')$ 仍是自共轭射影算子.

首先注意 $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega'' \cap \omega')$, 即 $E(\omega')E(\omega'') = E(\omega'')E(\omega')$, 即 $E(\omega')$ 与 $E(\omega'')$ 是可交换的自共轭射影算子.

现在证明两个可交换的自共轭射影算子之积, 仍是自共轭射影算子, 即若 $S = S^*, T = T^*, S^2 = S, T^2 = T$ 且 $TS = ST$, 则必为 $(ST)^* = ST, (ST)^2 = ST$.

事实上, $(ST)^* = T^*S^* = TS = ST,$

$$(ST)^2 = (ST)(ST) = STTS = STS = SST = ST.$$

(2°) 若 $\omega' \cap \omega'' = \phi$, 则 $E(\omega') + E(\omega'')$ 必须是自共轭射影算子

显然 $E(\omega') + E(\omega'')$ 是自共轭的, 现在证明它是射影算子, $\omega' \cap \omega'' = \phi$, 由 (1) 知 $E(\omega' \cap \omega'') = 0$, 再由 (3) 得 $E(\omega')E(\omega'') = 0$, 即 $E(\omega')$, $E(\omega'')$ 的值域相互正交: $R(E(\omega')) \perp R(E(\omega''))$, 所以 $(E(\omega') + E(\omega''))^2 = E(\omega')^2 + E(\omega'')^2 = E(\omega') + E(\omega'')$.

(3°) 由 (5) 知 E_{xx} 是 \mathcal{M} 上的一个正测度, 因为 $E(\omega)$ 是自共轭射影算子, 有

$$E_{xx}(\omega) = (E(\omega)x, x) = \|E(\omega)x\|^2,$$

且其全变差为

$$\|E_{xx}\| = E_{xx}(\Omega) = (E(\Omega)x, x) = (x, x) = \|x\|^2.$$

(4°) 由 (4) 知 E 是有限可加的, 那么 E 是否是可数可加的? 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)$ 是否收敛?

因为若 T 是射影算子, 则有

$$\|Tx\| = \|TTx\| \leq \|T\| \|Tx\| \leq \|T\|^2 \|x\|,$$

即 $\|T\| \leq \|T\|^2$, 所以 $\|T\| \geq 1$.

由此知或者 $\|E(\omega)\| = 0$ 或者 $\|E(\omega)\| \geq 1$, 故一般言之 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)$ 无意义.

但由 (5) $E_{x,y}$ 是测度, 若 $\omega_n \in \mathcal{M} (n=1, 2, \dots)$ 且 $\omega_i \cap \omega_j = \phi$ ($i \neq j$), 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{x,y}(\omega_n) = E_{x,y}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right).$$

$$\text{即 } \sum_{n=1}^{\infty} (E(\omega_n)x, y) = \left(E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x, y\right), \quad \forall y \in H.$$

这表明 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x$ 弱收敛于 $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x$.

又由 $\omega_i \cap \omega_j = \phi$ 知 $R(E(\omega_i)) \perp R(E(\omega_j))$, 即对一切 $x \in H$, $E(\omega_i)x \perp E(\omega_j)x$. 故 $\{E(\omega_n)x\}$ 是 H 中的一个正交序列. 由第四章

定理11知 $\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x$ 强收敛于 $E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\omega_n)x = E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n\right)x.$$

即得以下命题.

命题1 若 E 是单位分解, 则对一切 $x \in H$

$$\omega \rightarrow E(\omega)x \quad (\mathcal{M} \rightarrow H)$$

是可数可加的.

这里看出, 由定义知 $\mathcal{M} \rightarrow B(H)$ 即 $\omega \rightarrow E(\omega)$ 是有限可加的, 但 $\mathcal{M} \rightarrow H$, 即 $\omega \rightarrow E(\omega)x$ 是可数可加的.

命题2 设 E 是单位分解, $\omega_n \in \mathcal{M}$ 且 $E(\omega_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$,

若 $\omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$, 则 $E(\omega) = 0$.

证 对于任意 $x \in H$, $E_{xx}(\omega_n) = (E(\omega_n)x, x) = 0$ 又 E_{xx} 是测度, 故 $E_{xx}(\omega) = 0$, 即 $(E(\omega)x, x) = 0$, 又 $\|E(\omega)x\|^2 = E_{xx}(\omega)$, 所以 $E(\omega) = 0$.

§5.2 谱定理

设 E 是单位分解, 现在定义 $L^\infty(E)$. 设 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Ω 上的可测函数, 在 \mathbb{C} 上考虑以有理点为中心, 以有理数为半径的开圆 $\{D_j\}$, 则 $\{D_j\}$ 构成 \mathbb{C} 上拓扑的可数基, 令 V 是满足 $E(f^{-1}(D_j)) = 0$ 的所有 D_j 的并集, 由以上命题2知 $E(f^{-1}(V)) = 0$, V 是满足以上条件的最大开集.

V 使 E 成为零算子, $\mathbb{C} \setminus V$ 称为 f 的本性值域 (essential range), 对于几乎所有的 $p \in \Omega$, $\mathbb{C} \setminus V$ 是包含 $f(p)$ 的最小闭集, 即对于几乎所有的 $p \in \Omega$,

$$f(p) \in \mathbb{C} \setminus V.$$

若 $C \setminus V$ 是有界的, 则称 f 是本性有界的 (essential bounded), 又 $C \setminus V$ 是闭的, 故 $C \setminus V$ 是紧的, 此时定义 $\|f\|_{\infty}$ 如下:

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in C \setminus V\}.$$

令 B 是 Ω 上所有有界可测函数的代数, 取其范数为

$$\|f\| = \sup\{|f(p)| \mid p \in \Omega\}.$$

则 B 是一个有单元的, 可交换的 Banach 代数, 记

$$N = \{f \in B \mid \|f\|_{\infty} = 0\},$$

则 N 是 B 的一个闭理想. 所以 B/N 也是一个 Banach 代数

定义 $L^{\infty}(E) = B/N$, 即 $\dot{f} = f + N$, 且

$$\|\dot{f}\| = \inf\{\|f+n\| \mid n \in N\}.$$

显然 $\|\dot{f}\| = \|f\|_{\infty}$, 今后将 \dot{f} 和 f 等同起来, 另外 $\sigma(f)$ 就是 f 的本性值域, 事实上,

$\lambda \in \sigma(f) \iff (f - \lambda I)x$ 不可逆 \iff 存在 x 使 $(f - \lambda I)x = 0$, 且 $E\{x \mid (f - \lambda I)x = 0\} \neq 0 \iff$ 存在 x 使 $f(x) = \lambda$ 且 $E\{x \mid f(x) = \lambda\} \neq 0$.
 $\iff \lambda$ 属于 f 的本性值域.

以上定义了 $L^{\infty}(E)$, 现在寻求一个映射 ψ , 将 $L^{\infty}(E)$ 映射为 $B(H)$. 为定义 ψ , 先考虑 $L^{\infty}(E)$ 中的简单函数, 令 $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ 是 Ω 的一个分割, $\omega_i \in \mathcal{M}$, $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset (i \neq j)$, s 是 Ω 上的简单可测函数:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{\omega_i}, \quad \alpha_i \in C$$

今定义 $\psi(s) \in B(H)$ 如下:

$$\psi(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i E(\omega_i), \quad (1)$$

由于 $E(\omega_i)$ 是自共轭的, 得

$$\psi(s)^* = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} E(\omega_i).$$

又由(1)式得 $\psi(\overline{s}) = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} E(\omega_i).$

所以 $\psi(s)^* = \psi(\overline{s}).$ (2)

若 $(\omega_1', \omega_2', \dots, \omega_m')$ 为 Ω 的另一分割, 且函数

$$t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{\omega_j}, \text{ 则}$$

$$\psi(s)\psi(t) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i)E(\omega_j') = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i \cap \omega_j').$$

又 $st = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \chi_{\omega_i \cap \omega_j'},$

所以 $\psi(st) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j E(\omega_i \cap \omega_j').$

因此有 $\psi(st) = \psi(s)\psi(t).$ (3)

仿此可得 $\psi(\alpha s + \beta t) = \alpha \psi(s) + \beta \psi(t).$ (4)

由单位分解的定义中(5)知, 若 $x, y \in H.$

$$\begin{aligned} (\psi(s)x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E(\omega_i)x, y \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (E(\omega_i)x, y) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i E_{x,y}(\omega_i) = \int_{\Omega} s dE_{x,y}. \end{aligned} \quad (5)$$

又由(2)、(3)式得

$$\psi(s)^* \psi(s) = \psi(\overline{s}) \psi(s) = \psi(\overline{s}s) = \psi(|s|^2). \quad (6)$$

由(5)式有

$$\begin{aligned} \|\psi(s)x\|^2 &= (\psi(s)x, \psi(s)x) = (\psi(s)^* \psi(s)x, x) \\ &= (\psi(|s|^2)x, x) = \int_{\Omega} |x|^2 dE_{xx}. \end{aligned} \quad (7)$$

又 $\int_{\Omega} |s|^2 dE_{xx} \leq \|s\|_{\infty}^2 E_{xx}(\Omega) = \|s\|_{\infty}^2 \|x\|^2,$

所以 $\|\psi(s)x\|^2 \leq \|s\|_\infty^2 \|x\|^2$,

即 $\|\psi(s)\| \leq \|s\|_\infty$.

另外, 取 $x \in R(E(\omega_j))$, 由于 $E(\omega_i)E(\omega_j) = 0, i \neq j$, 故 $E(\omega_i)x = 0$, 又由于 $x = E(\omega_j)y$, 则 $E(\omega_j)x = E(\omega_j)^2 y = E(\omega_j)y = x$. 所以由 (1) 式得

$$\psi(s)x = \alpha_j E(\omega_j)x = \alpha_j x.$$

今取 j 使 $\alpha_j = \|s\|_\infty$, 即 α_j 是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的最大者, 则

$$\|\psi(s)x\| = |\alpha_j| \|x\| = \|s\|_\infty \|x\|,$$

所以 $\|\psi(s)\| \geq \|s\|_\infty$. 于是得到

$$\|\psi(s)\| = \|s\|_\infty. \quad (8)$$

至此 $\psi: s \rightarrow \psi(s)$ 在简单函数上已完全确定. 若 $f \in L^\infty(E)$, 则存在可测简单函数 s_n 一致收敛于 f , 且 ψ 在 s_n 上完全确定, 同时满足 $\|\psi(s_n)\| = \|s_n\|_\infty$. 由于 $\{s_n\}$ 是 Cauchy 序列, 所以 $\{\psi(s_n)\}$ 也是 Cauchy 序列, 因此 $\{\psi(s_n)\}$ 在 $B(H)$ 中收敛于某一个算子, 将这个算子定义为 $\psi(f)$. 容易看出, 这样定义的 $\psi(f)$ 与所取的收敛于 f 的简单函数列无关. 事实上, 设另有简单函数列 $\{t_n\}$ 收敛于 f , 则 $\{\psi(t_n)\}$ 仍为一 Cauchy 列, 它与 $\{\psi(s_n)\}$ 合在一起仍为一个 Cauchy 列, 故其极限仍为 $\psi(f)$.

综上所述, 我们已定义了 $L^\infty(E)$ 到 $B(H)$ 的映射 ψ , 下面再研究 ψ 的性质.

(1) 由 (8) 式得 $\|\psi(f)\| = \|f\|$, 即 ψ 是保持范数的.

(2) 由 (4) 式及 (3) 式知, 若 $f, g \in L^\infty(E)$, 则

$$\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha \psi(f) + \beta \psi(g),$$

$$\psi(fg) = \psi(f)\psi(g).$$

(3) 由 (2) 知, 若 $f \in L^\infty(E), \psi(f)^* = \psi(\overline{f})$

(4) ψ 在下述意义下是唯一的

$$(\psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x, y}, \quad x, y \in H, f \in L^\infty(E)$$

因为若有 $(\psi'(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x, y}$, 则 $(\psi(f)x, y) = (\psi'(f)x, y)$ 对一

切 $x, y \in H$ 成立, 所以 $\psi(f) = \psi'(f)$ 即 ψ 是唯一的.

以上指出, ψ 是保持范数, 保持加法、数乘和乘法运算, 且保持对合的映射, 因此 ψ 是保持对合的同构, 即 \bullet -同构

又由于 $L^\infty(E)$ 是完备的, 故 $R(\psi) = \psi(L^\infty(E))$ 是闭的 (保持范数), 又 $L^\infty(E)$ 是可交换的, 故 $R(\psi)$ 也是可交换的, 即由 ψ 的性质 (2) 知

$$\psi(f)\psi(g) = \psi(fg) = \psi(gf) = \psi(g)\psi(f).$$

所以 $R(\psi)$ 是 $B(H)$ 的一个闭的可交换的子代数, 又由 ψ 的性质 (3) 知, 若 $T \in \psi(L^\infty(E))$, 即 $T = \psi(f)$, 则 $T^* = \psi(\overline{f})$, 故 $T^* \in \psi(L^\infty(E))$. 因此 $R(\psi)$ 是 $B(H)$ 的闭的可交换的 \bullet -子代数, 也称为正规代数 (第四章定义 9).

最后若 $Q \in B(H)$ 与所有的 $E(\omega)$ 可交换, 由 (1) 式知 Q 与 $\psi(s)$ 可交换, 故 Q 与所有的 $\psi(f)$ 可交换.

综上所述, 得以下定理.

定理 1 若 E 是单位分解, 则由公式

$$(\psi(f)x, y) = \int_{\Omega} f dE_{x, y}, \quad (x \in H, y \in H)$$

确定了由 Banach 代数 $L^\infty(E)$ 到 $B(H)$ 的闭的正规子代数 A 上的保持范数的同构映射 ψ , 且保持对合

$$\psi(\overline{f}) = \psi(f)^*, \quad (f \in L^\infty(E)).$$

而且 $\|\psi(f)x\|^2 = \int_{\Omega} |f|^2 dE_{x, x}, \quad (x \in H, f \in L^\infty(E)).$

另外, $Q \in B(H)$ 与所有的 $\psi(f)$ 可交换, 当且仅当 Q 与所有的 $E(\omega)$ 可交换.

定理 2 若 A 是 $B(H)$ 的闭正规子代数, $I \in A$, \angle 是 A 的极大理想空间, $B(\angle)$ 是 \angle 上 Borel 集合的 σ -代数, 则

(1) 在 $B(\angle)$ 上存在唯一的单位分解 E , 使得对每一个 $T \in A$ 有

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y},$$

其中 \hat{T} 是 T 的 Gelfand 变换,

(2) 若 ω 是 Δ 的非空开集, 则 $E(\omega) \neq 0$,

(3) 算子 $S \in B(H)$ 与每一个 $T \in A$ 可交换的充分必要条件是 S 与每一个射影算子 $E(\omega)$ 可交换

证 (1) $B(H)$ 是 B^* -代数, A 是可交换的 B^* -代数, 由 Gelfand-Naimark 定理知, A 和 \hat{A} 等距. 一同构 $A \cong \hat{A} = C(\Delta)$. 考虑 $C(\Delta) \times H \times H$ 到 C 的映射:

$$\hat{T}, x, y \rightarrow (Tx, y), \quad T \in A.$$

该映射关于 \hat{T} 和 x 是线性的, 关于 y 是共轭线性的, 固定 x, y , 这个映射是 $C(\Delta)$ 上的线性泛函, 且

$|(Tx, y)| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\| = \|\hat{T}\| \|x\| \|y\|$.
故该泛函是有界的, 且其范数不超过 $\|x\| \|y\|$. 由 Riesz 表示定理知, 在 Δ 上存在有界的正则 Borel 测度 $\mu_{x, y}$, 使得

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x, y}. \quad (9)$$

且 $\|\mu_{x, y}\| \leq \|x\| \|y\|$.

固定 \hat{T} , $\mu_{x, y}$ 具有以下性质:

$$\begin{aligned} \mu_{x_1 + x_2, y} &= \mu_{x_1, y} + \mu_{x_2, y}, \quad \mu_{\alpha x, y} = \alpha \mu_{x, y}, \\ \mu_{x, y_1 + y_2} &= \mu_{x, y_1} + \mu_{x, y_2}, \quad \mu_{x, \alpha y} = \overline{\alpha} \mu_{x, y}. \end{aligned}$$

事实上,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x_1 + x_2, y} &= (T(x_1 + x_2), y) = (Tx_1, y) + (Tx_2, y) \\ &= \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x_1, y} + \int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x_2, y}, \quad \forall \hat{T} \in C(\Delta). \end{aligned}$$

所以 $\mu_{x_1+x_2, y} = \mu_{x_1, y} + \mu_{x_2, y}$. 同理可证其它等式.

对于 Δ 上任一有界 Borel 函数 $f: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, 考虑 $H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射:

$$(x, y) \mapsto \int_{\Delta} f d\mu_{x, y}.$$

它是双线性的, 且

$$\left| \int_{\Delta} f d\mu_{x, y} \right| \leq \|f\|_{\infty} \|\mu_{x, y}\| \leq \|f\|_{\infty} \|x\| \|y\|.$$

所以该映射是有界的, 其范数不超过 $\|f\|_{\infty}$. 由第四章定理13知, 存在唯一的 $s \in B(H)$, 使得

$$(x, sy) = \int_{\Delta} f d\mu_{x, y}.$$

又 $(x, sy) = (s^*x, y)$, s 是由 f 确定的, 故令 $s^* = \psi(f)$, 则对于 Δ 上任一有界 Borel 函数 f , 存在 $\psi(f) \in B(H)$, 使得

$$(\psi(f)x, y) = \int_{\Delta} f d\mu_{x, y}. \quad (10)$$

注意若 f 是连续函数 $f = \hat{T}$, 则 $\psi(f) = T$ 即 $\psi(\hat{T}) = T$.

比较 (9)、(10) 二式, 可以看出 (10) 式将 (9) 式由连续函数 \hat{T} 推广到有界 Borel 函数 f . 这样可以只考虑函数的可测性. 由 (10) 式, 对于 $\omega \in B(\Delta)$, χ_{ω} 可测, 定义

$$E(\omega) = \psi(\chi_{\omega})$$

现在证明这样定义的 $E(\omega)$ 是一个单位分解.

1) 首先证明 $E(\omega)$ 是自共轭算子.

当 $\hat{T} \in C(\Delta)$ 取实值, $\hat{T}^* = \overline{\hat{T}} = \hat{T}$, 所以 $T = T^*$.

$$\int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{x, y} = (Tx, y) = (x, Ty) = \overline{(Ty, x)} = \overline{\int_{\Delta} \hat{T} d\mu_{y, x}}.$$

由 $\overline{\hat{T}} = \hat{T}$ 得 $\mu_{x, y} = \overline{\mu_{y, x}}$.

当有界Borel函数 f 取实数值, 则

$$\begin{aligned}(\psi(f)x, y) &= \int_{\Delta} f d\mu_{x, y} = \int_{\Delta} f d\overline{\mu_{y, x}} = \overline{\int_{\Delta} f d\mu_{y, x}} \\ &= \overline{(\psi(f)y, x)} = \overline{(y, \psi(f)^*x)} = (\psi(f)^*x, y),\end{aligned}$$

所以 $\psi(f) = \psi(f)^*$.

因 χ_{ω} 是实的, 所以 $\psi(\chi_{\omega})^* = \psi(\chi_{\omega})$. 即 $E(\omega)^* = E(\omega)$.

2) 证明 $E(\omega' \cap \omega'') = E(\omega')E(\omega'')$, $\omega' \cap \omega'' = \phi$.

若 f, g 是有界Borel函数, 证明 $\psi(fg) = \psi(f) \cdot \psi(g)$, $ST \in C(\Delta)$, $(\widehat{ST}) = \widehat{S} \widehat{T}$, 由(9)式得

$$(S(Tx), y) = \int_{\Delta} \widehat{S} d\mu_{Tx, y}.$$

又
$$(S(Tx), y) = ((ST)x, y) = \int_{\Delta} \widehat{S} \widehat{T} d\mu_{x, y}.$$

所以
$$\int_{\Delta} \widehat{S} d\mu_{Tx, y} = \int_{\Delta} \widehat{S} \widehat{T} d\mu_{x, y}.$$

上式对任意连续函数 $\widehat{S} \in C(\Delta)$ 成立, 所以对任意有界Borel函数 f 有

$$\int_{\Delta} f d\mu_{Tx, y} = \int_{\Delta} f \widehat{T} d\mu_{x, y}.$$

再由(10)式, 有

$$\int_{\Delta} f d\mu_{Tx, y} = (\psi(f)Tx, y) = (Tx, \psi(f)^*y) = \int_{\Delta} \widehat{T} d\mu_{x, \psi(f)^*y}.$$

即
$$\int_{\Delta} f \widehat{T} d\mu_{x, y} = \int_{\Delta} \widehat{T} d\mu_{x, \psi(f)^*y}.$$

由于 \widehat{T} 连续, 所以 $\mu_{x, \psi(f)^*y} = f\mu_{x, y}$, 因此对于任意有界Borel函数 g , 有

$$\int_{\Delta} gf d\mu_{x,y} = \int_{\Delta} g d\mu_{x,\psi(f)^*y}.$$

由(10)式 $\int_{\Delta} gf d\mu_{x,y} = (\psi(gf)x, y),$

$$\int_{\Delta} g d\mu_{x,\psi(f)^*y} = (\psi(g)x, \psi(f)^*y) = (\psi(f)\psi(g)x, y),$$

所以 $\psi(gf) = \psi(g)\psi(f).$

由 $E(\omega)$ 的定义知

$$\begin{aligned} E(\omega' \cap \omega'') &= \psi(\chi_{\omega' \cap \omega''}) = \psi(\chi_{\omega'} \cdot \chi_{\omega''}) = \psi(\chi_{\omega'}) \cdot \psi(\chi_{\omega''}) \\ &= E(\omega') \cdot E(\omega''). \end{aligned}$$

3) 在上式中令 $\omega' = \omega'' = \omega$, 则得 $E(\omega) = E(\omega)^2$, 即 $E(\omega)$ 是射影算子, 又由1)知 $E(\omega)$ 是自共轭射影算子,

4) 再证 $E(\phi) = 0$, $E(\angle) = I$.

$$E(\phi) = \psi(\chi_{\phi}) = \psi(0). \text{ 且 } (\psi(0)x, y) = 0. \text{ 所以 } E(\phi) = 0.$$

$$E(\angle) = \psi(1) = \psi(\hat{I}) = I \quad (\text{因为 } \psi(\hat{T}) = T).$$

5) 证明当 $\omega \cap \omega' = \phi$, 则 $E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega')$

$$\begin{aligned} E(\omega \cup \omega') &= \psi(\chi_{\omega \cup \omega'}) = \psi(\chi_{\omega} + \chi_{\omega'}) = \psi(\chi_{\omega}) + \psi(\chi_{\omega'}) \\ &= E(\omega) + E(\omega'). \end{aligned}$$

6) 最后证明 $E_{x,y}$ 是测度.

由 $E_{x,y}$ 的定义知 $E_{x,y}(\omega) = (E(\omega)x, y)$. 又

$$(E(\omega)x, y) = (\psi(\chi_{\omega})x, y) = \int_{\Delta} \chi_{\omega} d\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(\omega)$$

所以 $E_{x,y}(\omega) = \mu_{x,y}(\omega)$, 即 $E_{x,y} = \mu_{x,y}$.

由于 $E_{x,y}$ 是正则的Borel测度, 故此时称 E 是正则的单位分解.

$E_{x,y} = \mu_{x,y}$, 由(9)式有

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x,y}.$$

此外, 这种正则的单位分解 E 是唯一的, 事实上, 设 E' 是另一个正则的单位分解, 则

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y} = \int_{\Delta} \hat{T} dE'_{x, y}.$$

由于 $E_{x, y}, E'_{x, y}$ 是Borel测度, 由连续函数唯一确定,

所以
$$E_{x, y} = E'_{x, y}.$$

即
$$(E(\omega)x, y) = (E'(\omega)x, y), \quad \forall x, y \in H.$$

因此
$$E(\omega)x = E'(\omega)x, \quad \forall x \in H.$$

故对一切 $\omega \in B(\Delta)$, $E(\omega) = E'(\omega)$, 所以 $E = E'$.

这样, 就证明了在 $B(\Delta)$ 上存在唯一的正则单位分解 E , 使得

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y}, \quad T \in A.$$

(2) 若 $\omega \neq \emptyset$ 是开集, 证明 $E(\omega) \neq 0$

用反证法, 设 $E(\omega) = 0$, 则对一切 $x, y \in H$, 有 $(E(\omega)x, y) = 0$, 即 $E_{x, y}(\omega) = 0$.

Δ 是紧的Hausdorff空间, ω 是非空集合, 由Urysohn引理知, 必有不为零的连续函数 \hat{T} , 其支集含于 ω 中, 由于 $E_{x, y}(\omega) = 0$, 则 $\int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y} = 0$, 故

$$(Tx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, y} = 0.$$

于是 $T = 0$, 即 $\hat{T} = 0$ 与 \hat{T} 不为零矛盾, 所以 $E(\omega) \neq 0$

(3) $S \in B(H)$, $T \in A$, 证明 $ST = TS \iff SE(\omega) = E(\omega)S$.

$$(STx, y) = (Tx, S^*y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{x, S^*y},$$

$$(TSx, y) = \int_{\Delta} \hat{T} dE_{Sx, y},$$

$$(SE(\omega)x, y) = (E(\omega)x, S^*y) = E_{x, S^*y}(\omega),$$

$$(E(\omega)Sx, y) = E_{Sx, y}(\omega).$$

$$ST = TS \iff E_{x, S \cdot y} = E_{Sx, y} \iff E_{x, S \cdot y}(\omega) = E_{Sx, y}(\omega) \iff SE(\omega) = E(\omega)S. \quad \text{定理得证.}$$

定理 3 若 $T \in B(H)$ 是正规算子, 则

(1) 在 $\sigma(T)$ 的 Borel 集合上存在唯一的正则单位分解 E , 满足

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda).$$

(2) 若 $S \in B(H)$ 与 T 可交换, 则 S 与每个 $E(\omega)$ 可交换.

证 (1) T 是正规算子, $TT^* = T^*T$, 由第四章定理 25 知, 可作包含 T, T^*, I 的 $B(H)$ 的闭正规子代数, 设 A 是所有以 T, T^* 为变量的多项式 $P(T, T^*)$ 集合的闭包, 则 A 就是包含 T, T^*, I 的 $B(H)$ 的最小闭正规子代数, 于是由定理 2 知, 在 A 的极大理想空间 Δ 的 Borel 集合上存在唯一的正则单位分解 F , 使得

$$(Sx, y) = \int_{\Delta} \hat{S} dF_{x, y} \quad (11)$$

对所有的 $S \in A$ 成立, 又由于多项式 $P(T, T^*)$ 在 A 中稠密, 由第四章定理 21 知, \hat{T} 是 Δ 到其值域 $\hat{T}(\Delta) = \sigma(T)$ 上的同胚映射, 且由第四章定理 31 知

$$\sigma_{B(H)}(T) = \sigma_A(T),$$

即

$$\sigma(T) = \sigma_A(T).$$

故 Δ 上的 Borel 集, 通过同胚映射 T , 对应于 $\sigma(T)$ 上的 Borel 集, 且 $\hat{S}: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$, 与 $\hat{S} \circ T^{-1}: \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$ 是一一对应的, (11) 式可相应地写为

$$(Sx, y) = \int_{\sigma(T)} \hat{S} \circ \hat{T}^{-1} dE_{x, y}.$$

其中 E 是 $B(\sigma(T))$ 上的单位分解, 特别地, 取 $S = T$ 得到

$$(Tx, y) = \int_{\sigma(T)} \hat{T} \circ \hat{T}^{-1} dE_{x, y} = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{x, y}, \quad (12)$$

其中 $j(\lambda) = \lambda, \forall \lambda \in \sigma(T)$, 或简写为

$$(Tx, y) = \int_{\sigma(T)} j dE.$$

又 $j(\lambda) = \lambda$, 故又可写为 $(Tx, y) = \int_{\sigma(T)} j(\lambda) dE(\lambda)$. 即

$$(Tx, y) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE.$$

将(12)式与定理1相比较, 得 $\psi(j) = T, \psi(\bar{j}) = \psi(j)^* = T^*$, $\psi(1) = E(\sigma(T)) = I$, 于是若 P 是 λ 和 $\bar{\lambda}$ 的多项式, 则 $\psi(P(j, \bar{j})) = P(T, T^*)$, 所以

$$P(T, T^*) = \int_{\sigma(T)} p(j, \bar{j}) dE = \int_{\sigma(T)} p(\lambda, \bar{\lambda}) dE(\lambda). \quad (13)$$

又由Stone-Weiertrass定理, 多项式 P 在 $C(\sigma(T))$ 中稠密, 故 $E(\omega)$ 由(13)式唯一决定, (1)得证.

(2) 若 $ST = TS$, 则 $ST^* = T^*S$ (第四章定理19), 所以 S 与 A 中每一个元素可交换. 由定理2知, 对每个 Borel 集 $\omega \subset B(\sigma(T))$ 成立着 $SE(\omega) = E(\omega)S$, 证毕.

单位分解 E 称为正规算子 $T \in B(H)$ 的谱分解. 若 f 是 $\sigma(T)$ 上的有界 Borel 函数, 有

$$T = \psi(j) = \int_{\sigma(T)} j dE,$$

$$\psi(f) = \int_{\sigma(T)} f dE.$$

习惯上记作. $f(T) = \psi(f) = \int_{\sigma(T)} f dE.$

运用这个记号, 以上定理的部分结论可归纳如下: 映射 ψ 将 $\sigma(T)$ 上的有界 Borel 函数映射到 $B(H)$ 内, 即 $f \rightarrow \psi(f) = f(T) =$

$\int_{\sigma(T)} f dE$, 这是一个代数同态, 且保持对合, $j \rightarrow j(T) = T, 1 \rightarrow j(1) = I$,

$\overline{f} \rightarrow f(T)^*$, 且由于 $f \in L^\infty(E)$, $\|\psi(f)\| = \|f\|_\infty$, 有

$$\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

若 $f \in C(\sigma(T))$, 则 f 必在 $\sigma(T)$ 上某一点 λ_0 达到其上界, 且存在 λ_0 的邻域 ω_{λ_0} , 在该邻域上 $f(\lambda)$ 接近 $f(\lambda_0)$, 且 $E(\omega_{\lambda_0}) \neq 0$, 所以有

$$\|f(T)\| = \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}.$$

若 f_n 一致收敛于 f , 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|f_n(T) - f(T)\| \rightarrow 0$.

$T = j(T) = \psi(j)$, $j(\lambda) = \lambda$ 是有界 Borel 函数, 可被简单函数一致逼近, 又 $\chi_\omega(T) = \psi(\chi_\omega) = E(\omega)$, 所以 T 可用 $E(\omega)$ 的线性组合来逼近.

若 $S \in B(H)$, $ST = TS$, 则对每一个有界 Borel 函数 f 有 $Sf(T) = f(T)S$.

定理 4 若 $T \in B(H)$ 是正规算子, 则

$$\|T\| = \sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\}.$$

证 由 $|(Tx, x)| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\|$ ($\|x\| = 1$), 得

$$\sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\} \leq \|T\|$$

只需证明 $\sup\{|(Tx, x)| \mid \|x\| = 1\} \geq \|T\|$, 为此只需证明任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in H$, $\|x_0\| = 1$, 且

$$|(Tx_0, x_0)| > \|T\| - \varepsilon.$$

由于 T 是正规的, 可以作包含 T 的 $B(H)$ 的最小闭 *-子代数 A , 由 Gelfand-Naimark 定理 A 和 \hat{A} 等距 *-同构, 即

$$A \cong \hat{A} = C(\Delta).$$

所以 $\|T\| = \|\hat{T}\|_\infty$, 又 \hat{T} 是 Δ 上的连续函数, Δ 是紧空间, \hat{T}

的值域是 $\sigma(T)$, 故必存在 $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 使得

$$\|\hat{T}\|_\infty = |\lambda_0|.$$

因此, 只需证明任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in H$, 使得 $\|x_0\| = 1$, 且

$$|(Tx_0, x_0) - \lambda_0| < \varepsilon. \quad (14)$$

令 E 是 T 的谱分解, 且记

$$\omega = \{\lambda \in \sigma(T) \mid |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\},$$

因为 $\lambda_0 \in \omega$, 故 ω 非空, 由定理2知 $E(\omega) \neq 0$, 又 $E(\omega)$ 是自共轭射影算子, 故存在 $x_0 \in H$, 使得 $\|x_0\| = 1$, 且 $E(\omega)x_0 = x_0$, 现在证明这个 x_0 满足(14)式.

由定理3, 对于有界Borel函数 f , 有

$$\int_{\sigma(T)} f dE = \psi(f) = f(T).$$

且 $f \mapsto f(T)$ 是代数同态, 及 $\|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$,

$j \mapsto j(T) = T$, $1 = 1(T) = I$, 令

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\chi_\omega(\lambda), \quad \lambda \in \sigma(T)$$

或 $f = (j - \lambda_0 I)\chi_\omega$.

则 $\psi(f) = f(T) = (\psi(j) - \lambda_0 \psi(1))\psi(\chi_\omega)$,

即 $f(T) = (j(T) - \lambda_0 1(T))\chi_\omega(T) = (T - \lambda_0 I)E(\omega)$,

故 $f(T)x_0 = (T - \lambda_0 I)E(\omega)x_0 = (T - \lambda_0 I)x_0$.

于是 $|(f(T)x_0, x_0)| = |((T - \lambda_0 I)x_0, x_0)|$
 $= |(Tx_0, x_0) - \lambda_0|.$

又 $|(f(T)x_0, x_0)| \leq \|f(T)\| \leq \sup\{|f(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$

$$\text{及 } |f(\lambda)| = |(\lambda - \lambda_0)\chi_\omega(\lambda)| = \begin{cases} 0, & \lambda \notin \omega, \\ \lambda - \lambda_0, & \lambda \in \omega. \end{cases}$$

但当 $\lambda \in \omega$ 时 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. 所以 $|f(\lambda)| < \varepsilon$. 即

$$|(Tx_0, x_0) - \lambda_0| < \varepsilon. \quad \text{定理得证.}$$

定理5 若 $T \in B(H)$ 是正规算子.

(1) $T=T^*$, 当且仅当 $\sigma(T)\subset\mathbf{R}$.

(2) T 是酉算子, 当且仅当 $\sigma(T)\subset\mathbf{T}$ (单位圆).

证 T 是正规算子, 故可作 $B(H)$ 的包含 T 的最小闭 *-子代数 $A, A\cong C(\Delta), \sigma_A(T)=\sigma(T)$.

若 $\lambda\in\sigma(T)$, 则有 $\varphi\in\Delta$, 使得 $\lambda=\hat{T}(\varphi), \bar{\lambda}=\hat{T}^*(\varphi)$, 所以 $\bar{\lambda}\in\sigma(T^*)$.

$$(1) \lambda\in\sigma(T)\iff\bar{\lambda}\in\sigma(T^*), \quad T=T^*\iff\lambda=\bar{\lambda}\iff\sigma(T)\subset\mathbf{R}.$$

$$(2) TT^*=T^*T=I\iff\hat{T}\hat{T}^*=\hat{T}^*\hat{T}=1\iff\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2=1\iff\lambda\in\mathbf{T}.$$

所以 $TT^*=T^*T=I\iff\sigma(T)\subset\mathbf{T}$.

§5.3 正规算子的特征值

定理 6 若 $T\in B(H)$ 是正规算子, E 是 T 的谱分解, 若 $f\in C(\sigma(T))$, 则

$$N(f(T))=R(E(f^{-1}(0))).$$

证 记 $f^{-1}(0)=\omega_0$, $\{0\}$ 是闭集, f 连续, 故 ω_0 是闭的, ω_0 也可能是空集, ω_0 是 Borel 集, 所以 $E(\omega_0)$ 有意义.

$f\chi_{\omega_0}=0$, 事实上, 当 $\lambda\in\omega_0$, 则 $f(\lambda)=0$, $\chi_{\omega_0}=1$, 而 $\lambda\notin\omega_0$, 则 $\chi_{\omega_0}=0$, 所以 $\psi(f)\psi(\chi_{\omega_0})=\psi(0)=0$, 即

$$f(T)\chi_{\omega_0}(T)=f(T)E(\omega_0)=0.$$

由此知, 若 $x\in R(E(\omega_0))$, 则 $x\in N(f(T))$, 所以

$$R(E(\omega_0))\subset N(f(T)).$$

$\sigma(T)\setminus\omega_0=\omega_1\cup\omega_2\cup\cdots$, 其中 $\{\omega_n\}$ 是互不相交的 Borel 集合, 且 $\text{dist}(\omega_0, \omega_n)>0 (n=1, 2, \cdots)$, 这是因为 $\sigma(T)\subset\mathbf{C}$ 是紧集合且为非空的. 在 \mathbf{C} 上以有理点为中心, 有理数为半径作开圆, 构成 \mathbf{C} 上拓扑的基, 这组开圆可记为 V_1, V_2, \cdots . 在 $\sigma(T)\setminus\omega_0$ 上可作开圆盘 ω_1 ,

使 $d(\omega_1, \omega_0) > 0$, 再作开圆盘 ω'_2 , 将 $\omega_1 \cap \omega'_2$ 部分及 ω'_2 落在 $\sigma(T)$ 外的部分除去, 得到 ω_2 , 同理可作 ω_3, \dots 等等, 即得到 $\omega_1, \omega_2, \dots$.

$$\text{定义 } f_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{f(\lambda)} \chi_{\omega_n}(\lambda), & \lambda \notin \omega_0, \\ 0, & \lambda \in \omega_0, \end{cases}$$

$$\text{或 } f_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{f(\lambda)}, & \lambda \in \omega_n, \\ 0, & \lambda \notin \omega_n. \end{cases}$$

因为 $d(\omega_n, \omega_0) > 0$, 故当 $\lambda \in \omega_n$ 时 $\frac{1}{f(\lambda)}$ 有界, 故 $f_n(\lambda)$ 是有界 Borel

函数. 又 $f_n(\lambda)f(\lambda) = \chi_{\omega_n}(\lambda)$, 即 $f_n \cdot f = \chi_{\omega_n}$, 所以

$$f_n(T)f(T) = \chi_{\omega_n}(T) = E(\omega_n), \quad n=1, 2, \dots$$

若 $x \in N(f(T))$, 则 $f(T)x = 0$. 所以 $E(\omega_n)x = 0$ 对一切 n 成立, 又

映射 $\omega \rightarrow E(\omega)x$ 是可数可加的 (§ 5.1 命题 1), 所以 $E(\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n)x =$

$E(\sigma(T) \setminus \omega_0)x = 0$, 又 $E(\sigma(T)) = I$, 所以

$$E(\omega_0 \cup (\sigma(T) \setminus \omega_0))x = E(\sigma(T))x = x,$$

即 $E(\omega_0)x + E(\sigma(T) \setminus \omega_0)x = x$.

因此有 $E(\omega_0)x = x$, 故 $x \in R(E(\omega_0))$, 即 $N(f(T)) \subset R(E(\omega_0))$.

最后得到 $N(f(T)) = R(E(\omega_0))$. 定理得证.

定理 7 若 E 是正规算子 $T \in B(H)$ 的谱分解, $\lambda_0 \in \sigma(T)$, 则

(1) $N(T - \lambda_0 I) = R(E(\{\lambda_0\}))$,

(2) λ_0 是 T 的特征值, 当且仅当 $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$,

(3) 若 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的孤立点, 则 λ_0 必为 T 的特征值.

(4) 若 $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ 是可数集, 则每一个 $x \in H$ 可唯一地示为

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

其中 $Tx_i = \lambda_i x_i$, 且 $x_i \perp x_j$, 当 $i \neq j$.

证 (1) 由定理 6, 取 $f(\lambda) = \lambda - \lambda_0$, 显然 $f^{-1}(0) = \{\lambda_0\}$, 又 $f = j - \lambda_0 I$, 所以 $f(T) = j(T) - \lambda_0 I(T) = T - \lambda_0 I$, 所以

$$N(T - \lambda_0 I) = R(E(\{\lambda_0\}))$$

(2) 若 λ_0 是 T 的特征值, 即存在 $x_0 \neq 0$ 使得 $Tx_0 = \lambda_0 x_0$, 即 $(T - \lambda_0 I)x = 0$ 有非零解, $x_0 \in N(T - \lambda_0 I)$, 所以 $N(T - \lambda_0 I)$ 不是零维的, 由 (1) 知 $R(E(\{\lambda_0\}))$ 不是零维的, 所以 $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$.

反之, $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$, 则 $N(T - \lambda_0 I)$ 不是零维的, 故存在 $x \neq 0$ 使 $(T - \lambda_0 I)x = 0$ 即 λ_0 是 T 的特征值.

(3) 若 λ_0 是 $\sigma(T)$ 的孤立点, 则 $\{\lambda_0\}$ 是 $\sigma(T)$ 中的开集, 由定理 2 知 $E(\{\lambda_0\}) \neq 0$, 由 (2) 知 λ_0 是 T 的特征值.

(4) $E(\{\lambda_i\})$ 中有些可能为零算子, 有些可能是非零算子, 例如 λ_i 是 $\sigma(T)$ 的孤立点. 但无论是哪种情形, $E(\{\lambda_i\})$ 的值域是相互正交的, 事实上, 若 $\omega_1 \cap \omega_2 = \phi$, 则 $E(\omega_1 \cap \omega_2) = E(\omega_1) \cdot E(\omega_2) = 0$, 即 $R(E(\omega_1)) \perp R(E(\omega_2))$, 因此若 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 则 $R(E(\{\lambda_i\})) \perp R(E(\{\lambda_j\}))$. 记 $E_i = E(\{\lambda_i\})$, 则有 $E_i x \perp E_j x (i \neq j)$, 对一切 $x \in H$ 成立, 又 $E(\omega)x$ 是可数可加的, 得

$$E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\lambda_i\}\right)x = \sum_{i=1}^{\infty} E_i x, \quad \forall x \in H.$$

又 $E\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\lambda_i\}\right)x = E(\sigma(T))x = Ix = x$. 所以有

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} E_i x.$$

记 $x_i = E_i x$, 得

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

其中 $x_i \perp x_j (i \neq j)$.

又 $x_i = E_i x = E(\{\lambda_i\})x$, 故 $x_i \in R(E(\{\lambda_i\}))$, 由 (1) 知 $x_i \in N(T - \lambda_i I)$, 所以 $Tx_i = \lambda_i x_i$.

再由 x_i 的正交性及 $Tx_i = \lambda_i x_i$, 利用(1)得出以上表达式是唯一的。定理得证。

§5.4 正算子和平方根

定义 2 若 $T \in B(H)$ 满足 $T = T^*$, $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, 则称 T 为正算子, 记作 $T \geq 0$ 。

定理 8 $T \in B(H)$, $T \geq 0$ 的充分必要条件是对于任意的 $x \in H$, $(Tx, x) \geq 0$ 。

证 若 $T \geq 0$, 令 E 是 T 的谱分解, 则

$$(Tx, x) = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_{xx}(\lambda), \quad \forall x \in H.$$

因为 E_{xx} 是正测度, 在 $\sigma(T)$ 上 $\lambda \geq 0$, 所以 $(Tx, x) \geq 0$ 。

反之, 若 $(Tx, x) \geq 0$, 则

$$(T^*x, x) = (x, Tx) = \overline{(Tx, x)} = (Tx, x).$$

所以 $T^* = T$ 。由定理 5 知 $\sigma(T) \subset \mathbf{R}$, 令 $\lambda > 0$ 。

$$((T + \lambda I)x, x) = (Tx, x) + \lambda(x, x) \geq \lambda(x, x) = \lambda \|x\|^2.$$

$$\text{又 } ((T + \lambda I)x, x) \leq \| (T + \lambda I)x \| \|x\|$$

$$\text{所以 } \| (T + \lambda I)x \| \geq \lambda \|x\|, \quad \forall x \in H.$$

故 $(T + \lambda I)$ 在 $B(H)$ 中可逆, 即 $T - (-\lambda)I$ 可逆, 所以 $-\lambda \notin \sigma(T)$ 。

$\sigma(T) \subset [0, \infty)$, 因此 $T \geq 0$ 。定理得证。

在第四章定理30中曾经证明“若 A 是 B^* -代数, $y \in A$, 则 $yy^* \geq 0$ ”, 在 B^* -代数 $B(H)$ 中, 容易证明, 若 $T \in B(H)$, 则 $T^*T \geq 0$, 利用以上定理, 只需证明 $(T^*Tx, x) \geq 0$ 。这是显然的, 因为

$$(T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 \geq 0$$

定理 9 每一个正算子 $T \in B(H)$, 都存在唯一的正平方根 $S \in B(H)$ 即 $S \geq 0$ 且 $S^2 = T$, 又若 T 可逆, 则 S 也是可逆的。记作 $S = \sqrt{T}$ 。

证 令 A 是 $B(H)$ 的包含 I, T 的任一闭的正规子代数, 则 $A \cong \hat{A} = C(\Delta)$, $T \geq 0$ 且 $\hat{T}(\Delta) = \sigma(T)$, 所以 $\hat{T} \geq 0$, 即 \hat{T} 是非负的连

续函数, 所以 \hat{T} 有唯一非负连续平方根 $\sqrt{\hat{T}}$, 也就是存在唯一的 $S \in A$, 使得 $\hat{S} = \sqrt{\hat{T}}$. 由 $\hat{S} \geq 0$ 知 $\sigma(S) = \hat{S}(A) \subset (0, \infty)$. 又 $\hat{S}^* = \overline{\hat{S}} = \hat{S}$, 所以 $S^* = S$, 故 $S \geq 0$.

再由 $\hat{S}^2 = \hat{S}^* \hat{S} = \hat{T}$, 得 $S^2 = T$, 即存在唯一的 $S \in A$, 满足 $S \geq 0$ 且 $S^2 = T$.

令 A_0 是以上所作的子代数 A 中最小的一个, 则由以上证明知, 存在唯一的 $S_0 \in A_0$, 使得 $S_0 \geq 0$, $S_0^2 = T$.

再证明 S 的唯一性, 设 $S \in B(H)$ 满足 $S \geq 0$, $S^2 = T$, 令 A 是 $B(H)$ 的包含 I, S 的最小闭正规子代数, 因为 $T = S^2$, 故 $T \in A$, 所以 $A \supset A_0$. 由以上证明知 A 中有唯一的 S 使得 $S \geq 0$, $S^2 = T$, 又 $S_0 \in A_0 \subset A$, 也满足 $S_0 \geq 0$, $S_0^2 = T$, 所以 $S_0 = S$. 即 T 的非负平方根是唯一的.

最后证明, 若 T^{-1} 存在, 则 $S^{-1} = T^{-1}S$, 为此只需证明

$$ST^{-1}S = T^{-1}SS = I$$

显然 $T^{-1}SS = T^{-1}S^2 = T^{-1}T = I$, 现证 $ST^{-1} = T^{-1}S$, 由以上证明中知, $S, T \in A$ 且 A 是 $B(H)$ 的闭正规子代数, 所以 $ST = TS$. 又 T^{-1} 存在, 记 $ST^{-1} = J$, $T^{-1}S = K$, 则 $TJ = TST^{-1} = STT^{-1} = S$, 所以 $J = T^{-1}S = K$, 即 $ST^{-1} = T^{-1}S$, 定理得证.

定理10 若 $T \in B(H)$, 则 T^*T 的正平方根 P 满足

$$\|Px\| = \|Tx\|, \quad \forall x \in H$$

且在 $B(H)$ 的正算子中, 只有 P 满足该式.

证 $T \in B(H)$, 则 $T^*T \geq 0$, 所以 $P = \sqrt{T^*T}$ 唯一存在. 若 P 是正算子, 则

$$\|Px\|^2 = (Px, Px) = (P^*Px, x) = (P^2x, x),$$

$$\text{又} \quad \|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x),$$

所以 $\|Px\| = \|Tx\|$ 当且仅当 $P^2 = T^*T$, 定理得证.

已知, 每一个复数 α 都可以表示为 $\alpha = \lambda |\alpha|$, 其中 $|\lambda| = 1$, 于

是考虑, 对于 $T \in B(H)$, 是否可将 T 表示为 $T = UP$, 其中 U 是酉算子, $P \geq 0$, 若以上表示是可能的, 则称 UP 为 T 的极分解.

若 $T = UP$, 由于 U 是酉算子, 保持范数, 所以 $\|Px\| = \|UPx\| = \|Tx\|$, 由定理10知 $P = \sqrt{T^*T}$ 故 P 是唯一的.

定理11 $T \in B(H)$

(1) 若 T 可逆, 则 T 具有唯一的极分解 $T = UP$.

(2) 若 T 是正规的, 则 T 有极分解 $T = UP$, 且 T 、 U 、 P 两两可交换.

证 (1) 若 T 可逆, 则 T^* , T^*T 可逆, 由定理9知 $P = \sqrt{T^*T}$ 可逆, 令 $U = TP^{-1}$, 则 U 可逆, 且

$$U^*U = (TP^{-1})^*(TP^{-1}) = P^{-1}T^*TP^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I$$

又 U^{-1} 存在, 且 U^* 为 U 的左逆, 故 U^* 一定也是右逆, 即 $U^*U = UU^* = I$, U 是酉算子.

又 $P = \sqrt{T^*T}$ 是唯一的, P 可逆, 故 U 是唯一的. (1) 得证.

(2) T 是正规的, 作 A 包含 T 且为 $B(H)$ 的闭正规子代数, 令 E 是 T 的谱分解.

在 $\sigma(T)$ 中令

$$U(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{|\lambda|}, & \lambda \neq 0, \\ 1, & \lambda = 0, \end{cases} \quad p(\lambda) = |\lambda|.$$

则 U , P 都是 $\sigma(T)$ 上有界 Borel 函数, 所以

$$(P(T)x, x) = \int_{\sigma(T)} |\lambda| dE_{xx} \geq 0.$$

故 $P(T) \geq 0$. 又

$$U(T)U(T)^* = U(T)\overline{U(T)} = (U\overline{U})(T) = 1(T) = I.$$

且 $U(\lambda)P(\lambda) = UP(\lambda) = \lambda$. 即 $UP = T$. 所以 $U(T)P(T) = T$, 即

$$T = UP.$$

其中 $P \geq 0$, U 是酉算子. 又 $T, P, U \in A$, 所以 T, P, U 两两可

交换。定理得证。

定义 3 设 $M, N \in B(H)$, 若存在 $T \in B(H)$ 使得

$$M = TNT^{-1}$$

则称算子 M 和 N 是相似的, 记作 $M \sim N$ 。

若存在酉算子 $U \in B(H)$ 使得

$$M = UNU^{-1}$$

则称算子 M 和 N 是酉等价的。

定理 12 $M, N \in B(H)$ 是正规算子, 若 $M \sim N$, 则 M 和 N 是酉等价的。

证 $M \sim N$, 则存在 $T \in B(H)$ 使得 $M = TNT^{-1}$, 因 T^{-1} 存在, 由定理 11 知 T 有极分解 $T = UP$, 其中 U 是酉算子, $P = \sqrt{T^*T}$ 且 P 可逆。所以

$$M = UPNP^{-1}U^{-1}$$

现只需证明 $PNP^{-1} = N$, 即 $PN = NP$, 先证明 $P^2N = NP^2$ 即 $T^*TN = NT^*T$ 。由于 $M = TNT^{-1}$, 即 $MT = TN$ 。由第四章定理 19 知 $M^*T = TN^*$ 。得 $T^*M = (M^*T)^* = (TN^*)^* = NT^*$, 所以 $NT^*T = T^*MT = T^*TM$ 。即 $NP^2 = P^2N$ 。

又 P^2 是正规算子, N 与 $f(P^2)$ 可交换, 其中 $f \in C(\sigma(P^2))$, 因 $P \geq 0$, $\sigma(P^2) \subset [0, \infty)$, 取 $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, $\lambda \in \sigma(P^2)$, 则 $f(P^2) = P$, 得 $NP = PN$ 。即 $PNP^{-1} = N$ 。所以 $M = UNU^{-1}$ 。定理得证。

第六章 拓扑群

拓扑群的概念是将群的概念与拓扑空间的概念联系在一起而产生的。同一个集合 G 中同时有群的乘法或加法运算与拓扑运算，这些运算由连续性条件相互联系着，即要求 G 的所有群的运算在拓扑空间 G 中连续。由于这样引入拓扑群，群与拓扑空间的基本关系几乎都可以转移到拓扑群上来讨论，例如子群、商群等。本章给出拓扑群的一些基本性质，特别要研究局部紧拓扑群，证明在其上存在不变的 Borel 测度。为下一章讨论交换群上的调和分析作准备。

§ 6.1 基本概念

定义 1 G 为集合，若满足

(1) G 为群，

(2) G 为拓扑空间，

(3) G 中所具有的群的运算在拓扑空间 G 中连续。

则称 G 为拓扑群。

条件 (3) 是指如下两种运算的连续性：

(3a) $G \times G \rightarrow G$,

$$x, y \rightarrow xy \quad (x, y \rightarrow x + y);$$

(3b) $G \rightarrow G$

$$x \rightarrow x^{-1}.$$

更完整地说，映射 $x, y \rightarrow xy$ 连续，是指若 x, y 是集合 G 的二元素，那末对于元素 xy 的任一邻域 W ，总存在元素 x 与 y 的邻域 U 与 V ，使得

$$UV \subset W,$$

其中

$$UV = \{ab \mid a \in U, b \in V\}.$$

映射 $x \rightarrow x^{-1}$ 连续, 是指若 x 是集合 G 的元素, 那末对于元素 x^{-1} 的每一个邻域 V , 总存在元素 x 的邻域 U , 使得

$$U^{-1} \subset V,$$

其中

$$U^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in U\}.$$

下面给出几个拓扑群的例子.

例 1 赋范线性空间是加法拓扑群. 显然在赋范线性空间加法运算 $x, y \rightarrow x + y$ 是连续的, 这是指, 若 $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, 则 $x_n + y_n \rightarrow x + y$. 同时映射 $x \rightarrow x^{-1}$ 是连续的, 是指 $x_n \rightarrow x$, 则 $-x_n \rightarrow -x$.

例 2 实数 R 和复数 Z 在通常加法与通常拓扑下是拓扑群. 单位圆周 T 是乘法拓扑群.

例 3 每一个代数群取离散拓扑都是一个拓扑群.

例 4 $GL(n, C)$ 表示 $n \times n$ 非奇异复数矩阵所成的一般线性群, 取通常的矩阵乘法为群的运算, 将 $n \times n$ 矩阵看成 C^{n^2} 中元素, 在 C 的拓扑下矩阵乘法自然是连续的, 因此 $GL(n, C)$ 是一个拓扑群.

同理 $GL(n, R)$ 表示 $n \times n$ 非奇异实数矩阵所成的一般线性群, 也构成一个乘法拓扑群, 且它们有一些闭子群. 例如:

$SL(n, R)$ 表示 $GL(n, R)$ 中行列式为 1 的 $n \times n$ 矩阵全体, 构成 $GL(n, R)$ 的闭子群.

$U(n, C)$ 表示 $GL(n, C)$ 中满足 $UU^* = U^*U = I$ 的 $n \times n$ 矩阵 U 的全体, 构成 $GL(n, C)$ 的闭子群, 称为酉群, 其中 U^* 代表复转置, 即 $U^* = \overline{U}'$, U' 代表 U 的转置矩阵.

以上例 1、2 所给出的拓扑群是可交换的, 更一般地 R^* 、 Z^* 、 T^* 都是可交换的拓扑群. 例 4 给出的拓扑群则是不可交换的.

下面给出拓扑群的一些初等性质:

(1) 取定 $a \in G$, G 是拓扑群, 则映射 $x \rightarrow xa$, $x \rightarrow ax$, $x \rightarrow x^{-1}$ 都是 G 上的同胚映射.

证 仅就映射 $x \rightarrow xa$ 证明. 首先, 映射是 1-1 的, 事实上, 对每一个元素 $y \in G$, 存在 $x \in G$ 使得 $y = xa$, 且 x 是唯一的. 其次, $x \rightarrow xa$ 是连续的. 若 $y = xa$, W 为 y 的一个邻域, 由定义 1 知, 存

在 x 与 a 的邻域 U 与 V , 使 $UV \subset W$, 而 $a \in V$. 因此 $Ua \subset W$. 故映射是连续的. 同理, 可证逆映射 $y \rightarrow ya^{-1}$ 的连续性.

(2) 设 G 是拓扑空间, 又是群, 则 G 是拓扑群的充分必要条件是映射 $x, y \rightarrow xy^{-1}$ ($G \times G \rightarrow G$) 是连续的.

证 只需证明定义 1 中条件 (3) 可用以下条件来代替. “若 $x, y \in G$, 那末对于元素 xy^{-1} 的任一邻域 W , 总存在 x 与 y 的邻域 U 与 V , 使得 $UV^{-1} \subset W$.” 该条件记作 (3c).

设 $z = xy^{-1}$. W 为 z 的一个邻域, 由定义 1 的条件 (3a) 知存在 x 与 y^{-1} 的邻域 U 与 V_1 , 使得 $UV_1 \subset W$. 再由条件 (3b) 知存在 y 的邻域 V 使得 $V^{-1} \subset V_1$, 所以 $UV^{-1} \subset W$. 即由 (3a) 和 (3b) 推出 (3c).

反之, 若 (3c) 成立. 将 y^{-1} 写成 $ey^{-1} = y^{-1}$. V_1 为 y^{-1} 的一个邻域, 则存在着 e 与 y 的邻域 U_1 与 V 使得 $U_1V^{-1} \subset V_1$, 又 $e \in U_1$. 所以 $V^{-1} \subset U_1V^{-1}$. 因此 $V^{-1} \subset V_1$, 即得 (3b). 再证 (3a). 设 $z = xy$ 或 $z = x(y^{-1})^{-1}$. 设 W 为 z 的邻域, 由 (3c) 知, 存在 x 与 y^{-1} 的邻域 U 与 V_1 使得 $UV_1^{-1} \subset W$. 又 V_1 是 y^{-1} 的邻域, 由以上证明知, 存在 y 的邻域 V 使 $V^{-1} \subset V_1$, 或 $V \subset V_1^{-1}$. 于是有 $UV \subset UV_1^{-1} \subset W$. (3a) 得证.

(3) 拓扑群 G 是齐性的. 这是指对任何 $a, b \in G$, 存在 C 到 G 上的同胚映射, 将 a 映成 b . 即存在同胚映射 φ , 使 $\varphi(a) = b$.

为证明这一事实, 只需考虑映射

$$\begin{aligned}\varphi: G &\rightarrow G \\ x &\rightarrow xa^{-1}b.\end{aligned}$$

注意到 $a^{-1}b$ 是固定的, 由 (1) 知这个映射是同胚的.

由拓扑群的齐性知, 若知道包含 G 内某一点 a 的开集, 就可以知道包含任意点的开集. 特别若知道包含 e 的开集 U , 则就可以知道包含任意点 b 的开集 bU . 有以下结论:

对于包含 a 的开集 V , 存在包含 e 的开集 U , 使得 $aU \subset V$ 及 $Ua \subset V$.

事实上, $ea = a$. 由乘法的连续性知, 对于 a 的邻域 V , 存在

e 的邻域 U , 及 a 的邻域 W , 使得 $UW \subset V$, 又 $a \in W$, 所以 $Ua \subset V$. 同理可证 $aU \subset V$.

由以上讨论知, 在拓扑群中, 要研究某点 a 的邻域, 只需研究单元 e 的邻域. 例如要证明 G 是局部紧的, 只需证明, 单元 e 的某一邻域 U , 其闭包 \overline{U} 是紧的.

(4) 若 U 是单元 e 的邻域, 则存在 e 的邻域 V , 使得 $V = V^{-1}$ 且 $V \subset U$. 称 V 为 e 的对称邻域.

证 设 $V = U \cap U^{-1}$. 显然 V 是 e 的邻域, 且 $V \subset U$. 现证 $V^{-1} = V$.

设 $a \in V$, 则 $a \in U$, $a \in U^{-1}$. 由 $a \in U$ 得 $a^{-1} \in U^{-1}$, 由 $a \in U^{-1}$ 得 $a^{-1} \in U$. 所以 $a^{-1} \in U \cap U^{-1} = V$. 即 $a \in V$ 则 $a^{-1} \in V$, 所以 $V = V^{-1}$.

(5) U 是 e 的邻域, 则存在 e 的邻域 W , 使得 $W^2 \subset U$.

证 $e = ee$. 设 U 是 e 的邻域, 则存在 e 的两个邻域 W_1, W_2 , 使得 $W_1 W_2 \subset U$. 取 $W = W_1 \cap W_2$, 则 $W^2 \subset W_1 W_2 \subset U$.

类似地可得 $W^n \subset U$, 其中 n 是任何正整数.

(6) 若 H, K 是拓扑群 G 的两个紧子集, 则乘积 HK 是紧的.

证 考虑映射 $f: G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$. 因为 H, K 是紧子集, 所以乘积空间 $H \times K$ 是紧的, 又因映射 f 是连续的, 故紧集的象仍为紧的. 即 $H \times K$ 的象 HK 是紧的.

(7) 若 H 是拓扑群 G 中的开集, 则对 G 中任一集合 S , HS 与 SH 都是开集.

证 任取 $s \in S$. 因为 $f: H \rightarrow Hs$, 即 $f(g) = gs$ 是同胚映射, 所以 $f(H) = Hs = \{gs \mid g \in H\}$ 是开集. 又 $HS = \bigcup_{s \in S} Hs$. 因此 HS 是开集, 同理可证 SH 是开集.

(8) 若开集 $U \subset G$, 紧集 $K \subset G$, 则

$$A = \{x \in G \mid xK \subset U\}, B = \{x \in G \mid Kx \subset U\}$$

都是开集.

证 任取 $x \in A$, 对一切 $k \in K$ 有 $xk \in U$. 根据乘法的连续性知, 存在包含 x 的开集 V_k , 包含 k 的开集 W_k , 使得 $V_k W_k \subset U$. 令 k 在

K 中变动, 则 W_k 的并集盖住 K , 即 $\bigcup \{W_k | k \in K\} \supset K$. 但集合 K 是紧的, 所以存在 K 中有限个元素 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $W_{k_1} \cup W_{k_2} \cup \dots \cup W_{k_n} \supset K$.

令 $V = V_{k_1} \cap V_{k_2} \cap \dots \cap V_{k_n}$, 则 V 是开集且 $x \in V$. 任取 $y \in V$, 则必有 $y \in V_{k_j} (j = 1, 2, \dots, n)$, 因此对任意的 $k \in K$ 有 $k \in W_{k_j}$ 且 $y k \in V_{k_j} W_k \subset U$. 所以 $y \in A$; 从而 $V \subset A$.

以上证明了任取 $x \in A$, 存在开集 V , 使得 $x \in V \subset A$. 因此 A 是开集. 同理可证 B 是开集.

定义 2 若函数 $f: G \rightarrow C$ 满足以下条件: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在包含 e 的开集 V , 使得对一切 $a \in V$, 不等式

$$|f(x) - f(ax)| \leq \varepsilon$$

对一切 $x \in G$ 成立, 则称 f 是左一致连续的.

若不等式

$$|f(x) - f(xa)| \leq \varepsilon$$

对一切 $x \in G$ 成立, 则称 f 是右一致连续的.

若 f 既是左一致连续, 又是右一致连续, 则称 f 为一致连续的. 显然在交换群上左一致连续和右一致连续是相同的.

定义 3 对于函数 $f: G \rightarrow C$, 若 $a \in G$, 定义 $f_a(x)$ 为 $f_a(x) = f(a^{-1}x)$.

定理 1 若 $f: G \rightarrow C$ 是左一致连续的, $a \in G$, 则映射 $\varphi: a \rightarrow f_a$ 是连续的.

证 令 $C(G)$ 表示所有有界复连续函数, 则 $C(G)$ 为一赋范线性空间, 其范数为 $\|g\|_\infty$, ($g \in C(G)$). φ 在 a 点连续是指, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 a 的邻域 U , 当 $b \in U$ 时有 $\|f_b - f_a\|_\infty < \varepsilon$. 由拓扑群的性质 3 知, 以上事实等价于, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 e 的邻域 V , 使得对所有 $c \in V$ 有 $\|f_{ac} - f_a\|_\infty < \varepsilon$.

由于 $f_{ac}(x) = f((ac)^{-1}x) = f(c^{-1}a^{-1}x) = f_a(a^{-1}x) = (f_a)_c(x)$, 所以 $f_{ac} - f_a = (f_a - f)_c$.

又 $\|g\|_{\infty} = \|g_e\|_{\infty}$ 于是 $\|f_e - f\|_{\infty} < \varepsilon$ 即 $\|f_e - f\|_{\infty} < \varepsilon$. 这说明要证明 $\varphi: a \rightarrow f_e$ 在 a 处的连续性, 只需证明它在 e 处的连续性.

根据 f 的左一致连续性, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 e 的对称邻域 V , 使得对一切 $c \in V$ 有

$$|f(x) - f(cx)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in G,$$

即
$$|(f - f_{\sigma^{-1}})(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in G.$$

由于 V 的对称性, $\sigma^{-1} \in V$, $c \in V$. 故得

$$|(f - f_e)(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in G.$$

从而 $\|f - f_e\|_{\infty} < \varepsilon$. 即 φ 在 e 处连续, 所以 φ 在 a 处连续, 又 $a \in G$ 是任意的, 故 φ 是连续函数.

定义 4 若 G 是拓扑群, G 作为拓扑空间是局部紧的 Hausdorff 空间, 则称 G 为局部紧群.

我们用 $C_{\infty}(G)$ 表示满足以下条件的函数全体: $f \in C(G)$, 且对任给 $\varepsilon > 0$ 存在紧集 $K \subset G$, 使得在 K° 上有 $|f| < \varepsilon$.

定理 2 G 是局部紧群, 若 $f \in C_{\infty}(G)$, 则 f 是一致连续的.

证 先证 f 是左一致连续的. 因为 $f \in C_{\infty}(G)$, 所以对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 $K \subset G$, 使得在 K° 上 $|f| < \frac{\varepsilon}{2}$.

任取 $a \in K$, f 在 a 处连续, 故存在开集 U_a , $e \in U_a$ 使得

$$|f(ua) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $u \in U_a$ 成立, 又对 $U_a \ni e$, 存在对称开集 $V_a \ni e$, 使得 $V_a^2 \subset U_a$. 由于 K 是紧集, $\{V_a a \mid a \in K\}$ 是 K 的开覆盖, 则存在 $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^n V_{a_i} a_i \supset K.$$

令

$$V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i},$$

则 $V^{-1} = V$, V 是开集且 $e \in V$.

下面证明, 任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$|f(x) - f(cx)| \leq \varepsilon, \quad \forall c \in V, \quad \forall x \in G.$$

分三种情形:

(1) 若 $cx \notin K, x \notin K$, 则

$$|f(x) - f(cx)| \leq |f(x)| + |f(cx)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2) $x \in K$, 则必有某个 a_i 使 $x \in V_{a_i}, a_i \subset U_{a_i}, cx \in V V_{a_i}, a_i \subset V_{a_i}^2 a_i \subset U_{a_i}, a_i$, 所以

$$\begin{aligned} |f(x) - f(cx)| &\leq |f(x) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(cx)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) $cx \in K$, 则必有某个 a_j 使 $cx \in V_{a_j}, a_j \subset U_{a_j}, x \in c^{-1}V_{a_j}, a_j \subset V V_{a_j}, a_j \subset U_{a_j}, a_j$. 所以

$$|f(x) - f(cx)| \leq \varepsilon$$

由以上讨论知 $f(x)$ 是左一致连续的. 同理可证, f 是右一致连续的. 定理得证.

§ 6.2 子群和商群

定义 5 若 G 是拓扑群, H 满足

(1) H 是群 G 的子群, 即若 $a, b \in H$, 则 $ab^{-1} \in H$.

(2) H 是拓扑空间 G 的子空间.

则称 H 是拓扑群 G 的子群.

定义 6 若 H 是拓扑空间 G 的开子集, 又是拓扑群 G 的子群, 则称 H 为拓扑群 G 的一个开子群.

有了子群的概念, 可以在群 G 中引入等价概念. H 是群 G 的子群, 若 $a, b \in G$, 当且仅当 $b^{-1}a \in H$ 时, 称 a 与 b 是等价的, 记作 $a \sim b$. 这样建立起来的等价关系满足下列条件:

(1) 反射性 $a \sim a$;

(2) 对称性 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$;

(3) 传递性 若 $a \sim b, b \sim c$, 则 $a \sim c$.

事实上, 由 $a^{-1}a = e \in H$ 知 $a \sim a$, 若 $a \sim b$ 即 $b^{-1}a \in H$, 则

$(b^{-1}a)^{-1} = a^{-1}b \in H$, 即 $b \sim a$. 又若 $a \sim b$, $b \sim c$ 即 $b^{-1}a \in H$, $c^{-1}b \in H$, 则 $c^{-1}a = c^{-1}bb^{-1}a \in H$. 即 $a \sim c$.

按以上关系, 将 G 中元素分成了等价类. 每一个等价类, 称为群 G 按子群 H 划分的左傍集. 若 A 为按 H 划分的一个左傍集, 且 $a \in A$, 则 $A = aH$. 且每一个形如 bH 的子集都是左傍集. 又 $H = eH$, 故 H 本身也是一个左傍集.

完全类似地, 可以引入另一等价关系: $a, b \in G$, $a \sim b$ 当且仅当 $ab^{-1} \in H$. 这样所得的等价类称为按子群 H 划分的右傍集.

定理 3 若 H 是拓扑群 G 的开子群, 则 H 是闭集.

证 只需证明 $G \setminus H$ 是开集. 由于 H 是开集, 利用 § 6.1 拓扑群的性质 (7) 知, 每一个左傍集都是开集. 又

$$G \setminus H = \bigcup \{xH \mid x \in G \setminus H\},$$

所以 $G \setminus H$ 是开集. 定理得证.

定理 4 若 H 是拓扑群 G 的子群, 且 H 包含单元 e 的一个邻域, 则 H 是 G 的开子群.

证 因为存在开集 $U \subset H$, 使得 $e \in U$. 所以 $H \subset HU$, 又 U 是 H 的子集. 所以 $HU \subset H$. 由此得

$$H = HU.$$

U 是开集, 故 HU 亦是开集. 即 H 是 G 的开子群. 证毕.

若 G 是拓扑群, H 是 G 的子群. 考虑左傍集空间

$$G/H = \{xH \mid x \in G\},$$

并考虑映射 $\pi: G \rightarrow G/H$,

$$x \rightarrow xH = \dot{x};$$

或写成

$$\pi(x) = \pi x = \dot{x} = xH.$$

在 G/H 中给出一个拓扑, 使 π 是连续的. 为此用下面的方法给出 G/H 中开集的定义: G/H 中的子集 W 是开集, 当且仅当 $\pi^{-1}(W)$ 在 G 中是开的. 这样得到集类

$$\hat{W} = \{W \subset G/H \mid \pi^{-1}(W) \text{ 是 } G \text{ 中开集}\}.$$

由于 $\pi^{-1}(\phi) = \phi, \pi^{-1}(G/H) = G$. 显然有 $\phi, G/H \in \hat{W}$. 若 $\{W_\alpha\}$ 为 \hat{W} 中一集族, 由于 $\pi^{-1}\left(\bigcup_\alpha W_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \pi^{-1}(W_\alpha)$, 而每一个 $\pi^{-1}(W_\alpha)$ 为开集. 所以 $\bigcup_\alpha W_\alpha \in \hat{W}$. 又若 $W_1, W_2 \in \hat{W}$, 则 $\pi^{-1}(W_1 \cap W_2) = \pi^{-1}(W_1) \cap \pi^{-1}(W_2)$, 故 $W_1 \cap W_2 \in \hat{W}$. 因此按以上方法定义的 W 确实满足开集的要求. 这样定义的拓扑是 G/H 中使 π 连续的最强的拓扑.

定理 5

- (1) π 是开映射, 即若 $U \subset G$ 是开集, 则 $\pi(U)$ 是 G/H 中的开集.
- (2) 若 H 是 G 的闭子集, 则 G/H 是 Hausdorff 空间.
- (3) 映射 $(x, yH) \rightarrow xyH$ 是 $G \times G/H \rightarrow G/H$ 的连续映射. (此时 G/H 是拓扑空间, $G \times G/H$ 是看成拓扑群作用在拓扑空间上)

证 (1) $\pi^{-1}(\pi U) = UH = \bigcup_x \{Ux \mid x \in H\}$.

事实上 $\pi U = \{xH \mid x \in U\} = UH$. 若 $v \in \pi^{-1}(\pi U)$, 则 $\pi v \in \pi U = UH$. 即存在某个 $x_1 \in U$ 使 $\pi v = x_1 H$, 或 $vH = x_1 H$. 又 $e \in H$, 所以 $v \in vH = x_1 H$. 故存在 $h \in H$ 使得 $v = x_1 h$. 即 $v \in UH$. 因此 $\pi^{-1}(\pi U) \subset UH$. 反之 UH 中任一元素可写成 xh , 其中 $x \in U, h \in H$. 又 $f(xh) = xhH = xH \in \pi(U)$. 所以 $xh \in \pi^{-1}(\pi U)$, 也就是 $UH \subset \pi^{-1}(\pi U)$. 这就得到

$$\pi^{-1}(\pi U) = UH.$$

又 U 为开集, 则 UH 为开集, 即 $\pi^{-1}(\pi U)$ 为开集, 由 G/H 中的拓扑定义知 πU 为开集. 也就是 π 为开映射.

(2) 设 xH, yH 是 G/H 中二相异元. 即 $xH \neq yH$, 也就是 $y^{-1}x \notin H$. 因 H 是闭的, 得 $G \setminus H$ 是开的, 又因 G 是拓扑群, 所以 $x, y \rightarrow y^{-1}x$ 是连续的. 于是存在开集 U, V 使得 $x \in U, y \in V$ 且 $V^{-1}U \subset G \setminus H$.

令 $A = \pi U, B = \pi V$, 由于 $x \in U$, 得 $\pi x \in \pi U = A$, 即 $xH \in A$.

同样有 $yH \in B$. 又 π 是开映射, 故 A, B 为开集. 若能证明 $A \cap B = \emptyset$, 则 G/H 是 Hausdorff 空间.

事实上, 若 $A \cap B \neq \emptyset$. 取 $z \in A \cap B$, 由 $z \in A$ 知存在 $u \in U$ 使得 $\dot{z} = \dot{u}$, 由 $z \in B$ 知存在 $v \in V$ 使 $\dot{z} = \dot{v}$, 于是得 $\dot{u} = \dot{v}$ 或 $uH = vH$. 即 $v^{-1}u \in H$, 与 $v^{-1}u \in G \setminus H$ 矛盾.

特别, 若 $H = \{e\}$, 得 $G/H = G$ 是 Hausdorff 空间.

(3) 定义映射 $\sigma: G \times G/H \rightarrow G/H$.

$$(x, \pi y) \rightarrow \pi xy.$$

或 $\sigma(x, \pi y) = \pi xy$. 若 $W \subset G/H$ 是开集, $(a, \pi b) \in \sigma^{-1}(W)$, 则 $\pi(ab) \in W$, 从而 $ab \in \pi^{-1}(W)$, 又乘法是连续的, 故存在开集 U 和 V , 使得 $a \in U$, $b \in V$ 且 $UV \in \pi^{-1}(W)$. 即

$$U \times \pi(V) \subset \sigma^{-1}(W).$$

因为 π 是开映射, $\pi(V)$ 是开的且 $\pi b \in \pi(V)$. 所以 σ 是连续的. 定理得证.

为了进一步讨论 G/H , 需要引入正规子群的概念. 前面曾将代数群 G 按子群 H 划分左傍集与右傍集. 那末在什么条件下, 左傍集与右傍集重合. 若 A 既是左傍集又是右傍集, 则 $A = aH = Ha$. 其中 a 是 A 中任一元素. 也就是 $a^{-1}Ha = H$. 由此引入以下定义.

定义 7 H 是代数群 G 的子群. 若对每一个 $h \in H$ 及每一个 $a \in G$ 有 $a^{-1}ha \in H$, 即对每一个 $a \in G$ 有 $a^{-1}Ha = H$, 则称 H 为群 G 的正规子群.

显然, $a^{-1}Ha = H$ 当且仅当 $aH = Ha$, $\forall a \in G$.

定义 8 G 是拓扑群. 若

(1) H 是群 G 的正规子群,

(2) H 是拓扑空间 G 的子空间.

则称 H 为拓扑群 G 的一个正规子群.

定理 6 G 是拓扑群, H 是 G 的闭正规子群, 则

(1) G/H 是拓扑群.

(2) 若 G 是局部紧的, 则 G/H 也是局部紧的.

证 (1) 在 G/H 中定义乘法: $xH \cdot yH = xyH$. 或记为 $\dot{x} \dot{y} = \dot{xy}$, 其中 $x, y \in G$. 在这样的乘法运算下, 容易验证 G/H 是一个群. 事实上, 由于 G 中元素满足结合律, 故 G/H 中结合律是显然的. H 是 G/H 的单位元素, $H(xH) = (xH)H = H$. 且 xH 的逆元素为 $x^{-1}H$, 这是因为 $(x^{-1}H)(xH) = (xH)(x^{-1}H) = H$.

又由定理 5 (2) 知 G/H 是一个 Hausdorff 空间. 若能证明群运算在拓扑空间中连续, 则 G/H 就是一个拓扑群:

设 W 是 G/H 中的开集, 且 $\pi(a)\pi(b)^{-1} = ab^{-1}H \in W$, 所以 $ab^{-1} \in \pi^{-1}(W)$. 由此知, 存在开集 U, V 使得 $a \in U, b \in V$. 且 $UV^{-1} \subset \pi^{-1}(W)$, 即 $\pi(U)\pi(V^{-1}) \subset W$. 由于 π 是开映射, $\pi(U), \pi(V^{-1})$ 是 G/H 中的开集. $a \in U$, 故 $aH \in \pi(U)$. $b^{-1} \in V^{-1}$. 因此 $b^{-1}H \in \pi(V^{-1}) = (\pi(V))^{-1}$. 由此知 $aH \in \pi(U)$, $bH \in \pi(V)$, 且 $\pi(U)\pi(V)^{-1} \subset W$. 所以群运算 $(\pi(x), \pi(y)) \rightarrow \pi(x)\pi(y)^{-1}$ 是连续的.

以上证明了 G/H 是一个拓扑群, 称为商群.

(2) 设 G 是局部紧的, 因而有单元 e 的某个开邻域 U , 使得 U 的闭包 \bar{U} 是紧的. 又 $\pi(e) = H$, 得 $H = \pi(e) \subset \pi(U) \subset \pi(\bar{U})$. 因为 π 是连续的, 故 $\pi(\bar{U})$ 是紧的. $\pi(\bar{U})$ 是 Hausdorff 空间的紧子集, 因而是闭的. $\pi(U)$ 为开集. 所以 $\overline{\pi(U)} \subset \pi(\bar{U})$. 又 $\overline{\pi(U)}$ 是紧空间的闭集, 因而也是紧的. 这就证明了存在单元 H 的开邻域 $\pi(U)$, 使 $\overline{\pi(U)}$ 是紧的, 故 G/H 是局部紧的. 定理得证.

定理 7 (同构定理). 设 G_1, G_2 是拓扑群, φ 是 G_1 到 G_2 上的代数同态, 且为连续的开映射, 记 $H = \ker \varphi = \{x \in G_1 \mid \varphi(x) = e\}$. 定义 $\rho(\pi x) = \varphi(x)$ 是 G_1/H 到 G_2 的映射, 则 ρ 是 G_1/H 到 G_2 上的同构映射, 而且也是同胚的.

证 首先容易看出 H 是代数群 G_1 的子群. 又若 $x \in H, a \in G_1$, 则

$$\varphi(a^{-1}xa) = \varphi(a^{-1})\varphi(x)\varphi(a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = e.$$

所以 $a^{-1}xa \in H$. 故 H 为代数群 G_1 的正规子群.

又因为 H 是元素 $e \in G_2$ 在连续映射 φ 下的原像, 故 H 是拓扑空间

G_1 的闭集, 因此 H 是拓扑群 G_1 的正规子群.

$\pi: G_1 \rightarrow G/H$ 是连续的开映射, φ 为 G_1 到 G_2 上的代数同态, 故定义 $\rho(\pi x) = \varphi(x)$ 是有确切意义的. 事实上, 若 $\pi x = \pi y$ 则 $y^{-1}x \in H$, 即 $\varphi(y^{-1}x) = e$. 故有 $\varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e$. 所以 $\varphi(y) = \varphi(x)$, 即 $\rho(\pi x) = \rho(\pi y)$.

又由于 φ 是 G_1 到 G_2 上的满射, 且为代数同态, 故以上定义的 ρ 是 G_1/H 到 G_2 上的满射, 且为 1-1 的, 同时保持代数运算, 因而 ρ 是 G_1/H 到 G_2 上的同构映射.

再证明 ρ 和 ρ^{-1} 是连续的.

设开集 $V \in G_2$, 由于 φ 是连续的, $\varphi^{-1}(V) \in G_1$ 也是开的, 又 π 是开映射, 故 $\pi(\varphi^{-1}(V))$ 是开的. 即 $\rho^{-1}(V) = \pi(\varphi^{-1}(V))$ 是开的. 所以 ρ 是连续的.

设开集 $U \in G_1/H$, 由定义知 $\pi^{-1}(U)$ 是开集, 又 φ 是开映射, 所以 $\varphi(\pi^{-1}(U))$ 是开的. 即 $\rho(U) = \varphi(\pi^{-1}(U))$ 是开的, 故 ρ^{-1} 是连续的. 定理得证.

以上 ρ 是拓扑群 G_1/H 到拓扑群 G_2 上的映射, 它是代数群 G_1/H 到代数群 G_2 上的同构映射, 又是拓扑空间 G_1/H 到拓扑空间 G_2 上的同胚映射. 称 ρ 为拓扑群 G_1/H 到拓扑群 G_2 上的同构映射.

若两个拓扑群之间存在着同构映射, 则称这两个拓扑群是同构的.

定理 8 若 G 是局部紧群, 则必存在一个 σ -紧的开子群 G_0 , G_0 也是闭的.

证 设 V 是 e 的对称的紧的开邻域, 由于乘法是连续的, 故 V^2, V^3, \dots 都是紧的. 令

$$G_0 = V \cup V^2 \cup V^3 \cup \dots$$

则显然 G_0 是 G 的一个子群, 且由于 $V^n (n=1, 2, \dots)$ 都是紧的, 故 G_0 是 σ -紧的.

又 $G_0 = G_0 V$, V 是开的, 故 G_0 是开的, 又由定理 3 知 G_0 是闭的, 证毕.

§ 6.3 局部紧拓扑群上不变Borel测度的存在性

本节将证明在任何一个局部紧拓扑群上, 存在一个不变的正则Borel测度. Riesz表示定理指出, 对于局部紧 T_2 空间 G , 若存在 $C_c(G)$ 上的正线性泛函 μ , 则存在正则Borel测度 $\tilde{\mu}$, 使得 $\mu f = \int_x f d\tilde{\mu}, f \in C_c(G)$. 为此, 只需证明在 $C_c(G)$ 上存在唯一的正线性泛函 m , 且 m 是左(右)不变的.

定理 9 若 G 是局部紧拓扑群, 则在 $C_c(G)$ 上存在唯一的非零左不变的正线性泛函 m . 即 $m \neq 0$ 是 $C_c(G)$ 上的线性泛函, 且满足

(1) $mf \geq 0$, 当 $f \in C_c(G)$ 且 $f \geq 0$,

(2) $m(f_a) = mf$, 当 $f \in C_c(G), a \in G$.

证 分两步证明定理.

(1) 令 $E = C_c^+(G) \setminus \{0\} = \{f: G \rightarrow [0, \infty) \mid f \text{ 是连续的, 且具有紧支集, } f \neq 0\}$ 首先证明在 E 上存在左不变的正线性泛函, 即有 $m: E \rightarrow (0, \infty)$. 满足

$$m(f_1 + f_2) = mf_1 + mf_2, \quad f_1, f_2 \in E.$$

$$m(cf) = cmf, \quad f \in E, C > 0.$$

$$mf_a = mf, \quad a \in G, f \in E.$$

为在 E 上定义 m , 分以下几步:

1) **引理 1** $f, g \in E$, 对于每一个 $x \in \text{supp} f$, 存在 $c > 0, a \in G, U \in \mathcal{N}_e$ (\mathcal{N}_e 表示 e 的邻域族), 使得在 xU 上成立着 $f \leq cg_a$.

证 由于 g 是紧集上的连续函数, 故存在 $b \in G$, 使得 $\|g\|_\infty = g(b) > 0$. 因此对 f 的支集中的某个 x , 一定可以找到 $c > 0$, 使得 $cg(b) > f(x)$.

由 f 的连续性知, 一定存在 x 的某个邻域 V , 或 e 的某个邻域 U , 使得

$$cg(b) > f(y), \quad y \in xU \text{ (或 } y \in Ux \text{)}.$$

再由 g 的连续性知, 上式在 b 的邻域内也成立. 又 $g_{xb^{-1}}(y) =$

$g(bx^{-1}y)$, 且当 y 在 x 的邻域中, 则 $bx^{-1}y$ 在 b 的邻域中, 故有

$$cg_{xb^{-1}}(y) \geq f(y), \quad y \in xU.$$

取 $a = xb^{-1}$, 则在 xU 上有 $f \leq cg_a$. 引理得证.

按上述引理的结论, 作 $\{Ux \mid x \in \text{supp} f\}$; 将 f 的支集覆盖住. 又 f 的支集是紧的, 故存在 a_i 和 c_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 使得

$$f \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i}.$$

事实上, 若 $x \in \text{supp} f$, 则必有某个 c_k, a_k , 使得 $f \leq c_k g_{a_k} \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i}$. 若 $x \notin \text{supp} f$, 则 $f = 0$, 上式自然成立.

2) 定义 ($f : g$)

$$(f : g) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \mid n \in \mathbb{N}, c_i > 0, a_i \in G, f \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i} \right\}.$$

由以上引理 1 知, 上式右方集合是非空的, 且显然有 $0 \leq (f : g) < \infty$.

($f : g$) 具有以下性质:

$$(a) (f : g) \geq \frac{\|f\|_{\infty}}{\|g\|_{\infty}}.$$

证 由于 f 是紧集合上的连续函数, 故存在 $x_0 \in G$, 使得 $\|f\|_{\infty} = f(x_0)$. 所以

$$\|f\|_{\infty} = f(x_0) \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i}(x_0) \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) \|g\|_{\infty},$$

又 $\|g\|_{\infty} \neq 0$, 因此有 $\frac{\|f\|_{\infty}}{\|g\|_{\infty}} \leq \sum_{i=1}^n c_i$. 取下确界, 即得所证.

(b) $(f_a : g) = (f : g)$, 由定义显然成立.

(c) $(cf : g) = c(f : g)$, $c > 0$, 显然成立.

(d) $(f_1 + f_2 : g) \leq (f_1 : g) + (f_2 : g)$ (次可加性).

证 任给 $\varepsilon > 0$, 有

$$\varepsilon + (f_1 : g) > \sum_{i=1}^n c_i, \text{ 其中 } f_1 \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i}.$$

$$\text{又 } \varepsilon + (f_2 : g) > \sum_{j=1}^m d_j, \text{ 其中 } f_2 \leq \sum_{j=1}^m d_j g_{b_j}.$$

$$\text{相加得 } 2\varepsilon + (f_1 : g) + (f_2 : g) > \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{j=1}^m d_j.$$

$$\text{而 } f_1 + f_2 \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i} + \sum_{j=1}^m d_j g_{b_j},$$

$$\text{所以 } (f_1 + f_2 : g) \leq \sum_{i=1}^n c_i + \sum_{j=1}^m d_j < (f_1 : g) + (f_2 : g) + 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 即得所证.

(e) 若 $f_1 \leq f_2$, 则 $(f_1 : g) \leq (f_2 : g)$. 显然成立.

(f) $(f : h) \leq (f : g)(g : h)$.

证 若 $f \leq \sum_{i=1}^n c_i g_{a_i}$, $g \leq \sum_{j=1}^m d_j h_{b_j}$, 则

$$g_{a_i} \leq \left(\sum_{j=1}^m d_j h_{b_j} \right)_{a_i} = \sum_{j=1}^m d_j h_{a_i b_j}.$$

$$\text{于是 } f \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j h_{a_i b_j}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (f : h) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j = \left(\sum_{i=1}^n c_i \right) \left(\sum_{j=1}^m d_j \right) \\ &\leq (f : g)(g : h). \end{aligned}$$

$$(g)(f : f) = 1.$$

证 因为 $f = 1 \cdot f$, 所以 $(f : f) \leq 1$. 又 $(f, f) \geq \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1$.

故 $(f:f)=1$.

以上定义的 $(f:g)$ 满足次可加性, 而不是可加性. 为利用 $(f:g)$ 定义 m , 必须改进次可加性.

3) 固定 $h \in E$, 对于 $f, g \in E$ 定义

$$mg(f) = \frac{(f:g)}{(h:g)},$$

由于 $(f:g) \leq (f:h)(h:g)$. 得 $mg(f) \leq (f:h)$, 又由于 $(h:g)$

$\leq (h:f)(f:g)$. 所以 $mg(f) \geq \frac{1}{(h:f)}$. 即

$$mg(f) \in \left[\frac{1}{(h:f)}, (f:h) \right], \text{ (与 } g \text{ 无关).}$$

因此 $mg(f) \neq 0$. 对于每一个 f , 闭区间 $\left[\frac{1}{(h:f)}, (f:h) \right]$ 是紧的,

由 Tychonoff 定理知

$$S = \prod_{f \in E} \left[\frac{1}{(h:f)}, (f:h) \right]$$

是紧的 Hausdorff 空间, 对于一切 $g \in E$, mg 可以看成 S 中一点, $mg(f)$ 就是 mg 的 f 坐标. mg 具有以下性质:

(a) mg 是左不变的.

$$mg(f_a) = \frac{(f_a:g)}{(h:g)} = \frac{(f:g)}{(h:g)} = mg(f).$$

(b) mg 是正齐次的.

$$mg(cf) = cmg(f), \quad c > 0, \text{ 显然成立.}$$

(c) mg 是次可加的.

$$mg(f_1 + f_2) \leq mg(f_1) + mg(f_2).$$

由 $(f:g)$ 的次可加性. 显然成立.

(d) 引理 2 $f_1, f_2 \in E$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{N}_e$, 对于支集

在 V 中的一切 $g \in E$, 有

$$(1+\varepsilon)mg(f_1+f_2) \geq mg(f_1)+mg(f_2).$$

证 令 $f=f_1+f_2$, $f_0 \in E$, 且在 f 的支集上 $f_0=1$. 令 $\delta > 0$, 且满足 $\delta(f_0:f) \leq \frac{\varepsilon}{4}$, 其中 $\varepsilon > 0$ 是给定的. 定义

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{f_i(x)}{f(x)+\delta f_0(x)}, & \text{当 } f_i(x) \neq 0, \\ 0, & \text{当 } f_i(x) = 0, \end{cases} \quad (i=1, 2).$$

显然 $h_i(x) \in E$ 且 $\text{supp } h_i = \text{supp } f_i$. 由定理 2 知 $h_i(x)$ 是一致连续的. 任给 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 $V \in \mathcal{N}_\infty$. 当 $x^{-1}y \in V$ 有

$$|h_i(x) - h_i(y)| < \varepsilon_1, \quad (i=1, 2)$$

令 $g \in E$, $\text{supp } g \subset V$ 且 $f \leq \sum_{j=1}^n c_j g_{a_j}$. 则

$$f_i = (f + \delta f_0)h_i \leq \sum_{j=1}^n c_j h_i g_{a_j} + \delta h_i f_0, \quad (i=1, 2)$$

又由定义知 $h_i \leq 1$ 所以

$$f_i \leq \sum_{j=1}^n c_j h_i g_{a_j} + \delta f_0, \quad (i=1, 2)$$

若 x 使 $g_{a_j}(x) \neq 0$, 即 $g(a_j^{-1}x) \neq 0$. 也就是 $a_j^{-1}x \in \text{supp } g \subset V$, 则

$$|h_i(x) - h_i(a_j)| < \varepsilon_1, \quad (i=1, 2)$$

所以 $f_i \leq \sum_{j=1}^n c_j [h_i(a_j) + \varepsilon_1] g_{a_j} + \delta f_0, \quad (i=1, 2).$

由于 $(g_{a_j}:g)=1$, 得

$$(f_i:g) \leq \sum_{j=1}^n c_j [h_i(a_j) + \varepsilon_1] + \delta(f_0:g), \quad (i=1, 2)$$

因此 $(f_1:g) + (f_2:g) \leq \sum_{j=1}^n c_j [h_1(a_j) + h_2(a_j) + 2\varepsilon_1] + 2\delta(f_0:g).$

由 h_i 的定义容易看出 $h_1(a_j) + h_2(a_j) \leq 1$, 所以

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq \sum_{j=1}^n c_j(1 + 2\varepsilon_1) + 2\delta(f_0 : g).$$

由 $(f : g)$ 的定义及 $(f_0 : g) \leq (f_0 : f)(f : g)$, 得

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (1 + 2\varepsilon_1 + 2\delta(f_0 : f))(f : g).$$

取 $\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{4}$, 又 $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4(f_0 : f)}$, 得

$$(f_1 : g) + (f_2 : g) \leq (1 + \varepsilon)(f : g). \quad \text{引理得证.}$$

4) 对于每一个 $V \in \mathcal{N}_e$, 令

$$K_V = \text{Gl}\{mg \mid \text{supp } g \subset V\}.$$

由于 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n = V \in \mathcal{N}_e$.

故 $K_V \subset K_{V_i}$, ($i = 1, 2, \dots, n$). 由Urysohn引理知 $K_V \neq \phi$. 这表明 K_V 具有有限交性质, 即

$$K_{V_1} \cap K_{V_2} \cap \cdots \cap K_{V_n} \neq \phi.$$

又因为 S 是紧空间, K_V 是闭的, 故

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}_e} K_V \neq \phi.$$

令 $m \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_e} K_V$.

则 m 具有以下性质.

$$(a) m(f_a) = m(f).$$

证 $m \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_e} K_V$. S 上的拓扑是取乘积空间的拓扑, 对于任

给的 $\varepsilon > 0$, 取 m 的邻域为

$$U\{s \in S \mid |s(f_a) - m(f_a)| < \varepsilon, |s(f) - m(f)| < \varepsilon\}.$$

由于 m 是集合 $\{mg \mid \text{supp } g \subset V\}$ 的极限点, 故 U 中必有该集合中的元素, 即存在 $g \in E$, 使得

$$|mg(f) - m(f)| < \varepsilon, \quad |mg(f_a) - m(f_a)| < \varepsilon.$$

又 $mg(f) = mg(f_a)$, 所以

$$|m(f) - m(f_a)| < 2\varepsilon$$

又 ε 是任意的, 故得 $m(f_a) = m(f)$.

(b) $m(cf) = cm(f)$, $c > 0$.

证明与 (a) 相似.

(c) $m(f_1 + f_2) = m(f_1) + m(f_2)$.

证 因为 $mg(f_1 + f_2) \leq mg(f_1) + mg(f_2)$, 故有

$$m(f_1 + f_2) \leq m(f_1) + m(f_2).$$

又由3)知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{N}$, 当 $g \in E$ 且 $\text{supp } g \subset V$,

有 $(1 + \varepsilon)mg(f_1 + f_2) \geq mg(f_1) + mg(f_2)$,

所以 $(1 + \varepsilon)m(f_1 + f_2) \geq m(f_1) + m(f_2)$.

由 ε 的任意性即得所证.

总结以上讨论, m 就是 E 上非零的左不变正线性泛函,

(2) 将泛函 m 扩张到 $C_c(G)$ 空间上.

当 $f = 0$, 定义 $m(0) = 0$.

当 $f \in C_c(G)$ 是实值函数, 则 $f = f^+ - f^-$, 定义

$$m(f) = m(f^+) - m(f^-).$$

$f \in C_c(G)$ 是复值函数, $f = u + iv$, 定义

$$m(f) = m(u) + im(v).$$

这样定义的 m 就是 $C_c(G)$ 上非零的左不变正线性泛函, 由 Riesz 表示定理知

$$mf = \int_G f dm, \quad f \in C_c(G)$$

就是一个左不变的 Haar 积分.

下面证明 m 的唯一性. 为此先证明以下两个引理.

引理 3 若 $f \in C_c(G)$, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_f \in \mathcal{N}$, 使得对一切 $x \in U_f$, 有

及 $\int_G |f(xy) - f(y)| dm(y) < \varepsilon$,

$$\int_G |f(yx) - f(y)| dm(y) < \varepsilon.$$

证 只证第一式, 第二式的证明完全类似.

由 $f \in C_0(G)$ 知 f 是一致连续的. 任给 $\varepsilon' > 0$ 存在 $V_1 \in \mathcal{N}_e$, 当 $x \in V_1, y \in G$, 有 $|f(xy) - f(y)| < \varepsilon$.

$\text{supp} f = K$ 是紧集, m 是正测度, 因此任给 $\varepsilon'' > 0$, 存在开集 $U \supset K$, 使得 $mU < mK + \varepsilon''$. 再根据 § 6.1 拓扑群性质 (8) 知

$$V_2 = \{x \in G \mid xK \subset U\}$$

是开集, 又 $e \in V_2$. 故 $V_2 \in \mathcal{N}_e$. 令 $V = V_1 \cap V_2$, 并且假设 $V = V^{-1}$. 否则缩小 V 而得 e 的对称邻域.

若 $x \in V$, 则对一切 $y \in G$, 有 $|f(xy) - f(y)| < \varepsilon'$ 且 $xK \subset U, x^{-1}K \subset U$.

当 $x \in V$, 若 $f(xy) \neq 0$, 则 $xy \in K, y \in x^{-1}K \subset U$. 若 $f(y) \neq 0$, 则 $y \in K \subset U$.

若 $y \notin U$, 则 $f(y) = 0$, 且 $f(xy) = 0$ (否则 $y \in U$). 所以

$$\int_G |f(xy) - f(y)| dm(y) = \int_U |f(xy) - f(y)| dm(y) < \varepsilon' m(U)$$

$$< \varepsilon' (mK + \varepsilon'') < \varepsilon. \quad \text{引理得证.}$$

引理 4 设 m 是 G 上左不变的的正的正则测度, $u \subset G$ 是非空开集, 则 $m(u) > 0$.

证 用反证法. 设 $m(u) = 0$. 若 K 是一个紧集, 则必有 $K \subset \bigcup \{au \mid a \in G\}$.

事实上, 若 $k \in K$, 取 $u_0 \in u$, 令 $a = ku_0^{-1}$, 则 $k = au_0 \in au$. 由此知 $\bigcup \{au \mid a \in G\}$ 是 K 的一个开覆盖, 又 K 是紧集, 故存在 $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ 使得

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n a_i u.$$

所以 $mK \leq \sum_{i=1}^n m(a_i u)$. 又 m 是左不变的 $m(a_i u) = m(u) = 0$.

故 $mK = 0$, 即对一切紧集 K 有 $mK = 0$. 又

$$mG = \sup \{mK \mid K \subset G \text{ 且 } K \text{ 为紧集}\},$$

因此 $mG = 0$ ，即 $m = 0$ 。此与 $m \neq 0$ 矛盾。所以 $m(u) > 0$ 。

(3) 唯一性。设 n 是 $C_0(G)$ 上另一个左不变非零正线性泛函。则存在 $c > 0$ ，使得 $m = cn$ 。

只需在集合 E 上证明即可。即只需证明，若 $f, g \in E$ ，则

$$\frac{mf}{nf} = \frac{mg}{ng} = c.$$

若 $f, g \in E$ ，利用 m, n 是左不变的，有

$$\begin{aligned} mf \cdot nh &= \iint f(y)h(x)dm(y)dn(x) \\ &= \iint f(xy)h(x)dm(y)dn(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mh \cdot nf &= \iint h(y)f(x)dm(y)dn(x) \\ &= \iint h(x^{-1}y)f(x)dm(y)dn(x). \end{aligned}$$

若记 $h^0(x) = h(x^{-1})$ ，则

$$\begin{aligned} mh \cdot nf &= \iint h^0(y^{-1}x)f(x)dm(y)dn(x) \\ &= \iint h^0(x)f(yx)dm(y)dn(x). \end{aligned}$$

若取 h 使 $h^0(x) = h(x)$ ，也就是取 h 满足 $h(x^{-1}) = h(x)$ ，

则 $mf \cdot nh - mh \cdot nf = \iint h(x)(f(xy) - f(yx))dm(y)dn(x)$ 。

所以 $|mf \cdot nh - mh \cdot nf| \leq \iint h(x) |f(xy) - f(yx)| dm(y)dn(x)$ 。

$f \in C_0(G)$ ，由引理 3 知，任给 $\varepsilon' > 0$ ，存在 $U_f \in \mathcal{N}_0$ ，对于一切 $x \in U_f$ ，有

$$\int_0 |f(xy) - f(y)| dm(y) < \varepsilon',$$

$$\int_0 |f(yx) - f(y)| dm(y) < \varepsilon'.$$

再取 h 使 $\text{supp} h \subset U_f$, 则当 $x \notin U_f$, $h = 0$, 所以

$$\begin{aligned} |mf \cdot nh - mh \cdot nf| &\leq \iint h(x) (|f(xy) - f(y)| \\ &\quad + |f(yx) - f(y)|) dm(y) dn(x) \\ &\leq 2\varepsilon' \int_{U_f} h(x) dn(x) = 2\varepsilon' nh. \end{aligned}$$

为对称起见, 若 $nf \neq 0$ 令 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} nf$, 则有

$$|mf \cdot nh - mh \cdot nf| \leq \varepsilon nf \cdot nh.$$

现在利用引理 4 证明 $nf \neq 0$, $nh \neq 0$. 事实上 $f \in E$, 即 $f \geq 0$. 故至少存在一个非空集合 D , 在 D 上 $f > \beta > 0$. 故 $nf = \int_0 f dn > \beta \cdot nI \neq 0$. 同理 $nh \neq 0$. 故以上不等式可写成

$$\left| \frac{mf}{nf} - \frac{mh}{nh} \right| < \varepsilon.$$

总结以上讨论知, 对于 $f \in E$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_f \in \mathcal{N}$. 当 $h \in E$ 且 $h(x) = h(x^{-1})$, $\text{supp} h \subset U_f$, 有

$$\left| \frac{mf}{nf} - \frac{mh}{nh} \right| < \varepsilon.$$

以上所要求的 h 是存在的. 事实上, 不妨取邻域 U_f 是对称的, 根据 Urysohn 引理知, 存在 $h_1 \in E$, 使得 $\text{supp} h_1 \subset U_f$. 令

$$h(x) = \frac{1}{2} (h_1(x) + h_1(x^{-1}))$$

即为所求. 同理对于 $g \in E$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_g \in \mathcal{N}$. 当 $h \in E$ 且 $h(x) = h(x^{-1})$, $\text{supp} h \subset U_g$, 有

$$\left| \frac{mg}{ng} - \frac{mh}{nh} \right| < \varepsilon.$$

若取 $h \in E$, 满足 $h(x) = h(x^{-1})$, $\text{supp } h \subset U_f \cap U_g$, 则

$$\left| \frac{mf}{nf} - \frac{mg}{ng} \right| \leq \left| \frac{mf}{nf} - \frac{mh}{nh} \right| + \left| \frac{mg}{ng} - \frac{mh}{nh} \right| < 2\varepsilon.$$

所以, $\frac{mf}{nf} = \frac{mg}{ng}, \forall f, g \in E.$

即 $\frac{mf}{nf} = c$. 也就是 $m = cn$. 定理得证.

由定理 9 及 Riesz 表示定理, 得以下结论.

定理 10 设 G 是局部紧拓扑群, 则在 G 上存在唯一的左不变正则 Borel 测度.

从定理 8 的证明中看出, 以上所定义的局部紧群 G 上的 Borel 测度 m 是左不变的且对任何非空开集 U 有 $m(U) > 0$, 也称 m 为左 Haar 测度.

例如, 由实数组成的可加的局部紧群和 Lebesgue 测度, 对任一非空开集, 其 Lebesgue 测度为正, 且任何集的 Lebesgue 测度关于左(右)平移是不变的, 因此 Lebesgue 测度是 Haar 测度.

注 1 由引理 3 知, 若 $f \in C_0(G)$, 则 $\varphi: x \rightarrow f_x$ 是 $G \rightarrow L^1(G, m)$ 的连续映射.

事实上, 由引理 3 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}$, 当 $x \in U$ 有 $\|f_x - f\|_1 = \int_G |f(xy) - f(y)| dm(y) < \varepsilon$.

以上只用到了 f 的一致连续性. 由于 $C_0(G)$ 中的函数也是一致连续的, 故若 $f \in C_0(G)$, 则 $x \rightarrow f_x$ 也是连续映射.

注 2 若 $f \in L^1(G, m)$, 则映射 $\varphi: x \rightarrow f_x$ 也是连续的.

事实上, $L^1(G, m)$ 中的函数都可以用 $C_0(G)$ 中的函数逼近, 即对 $f \in L^1(G, m)$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in C_0(G)$, 使得 $\|f - k\|_1 < \varepsilon$, 又

$$\|f - f_x\|_1 \leq \|f - k\|_1 + \|k - k_x\|_1 + \|k_x - f_x\|_1.$$

由于 $x \rightarrow k_x$ 是连续的, $\|k - k_x\|_1 < \varepsilon$, 又 $\|k_x - f_x\|_1 < \varepsilon$, 所以 $x \rightarrow f_x$ 是连续的.

同理, 若 $f \in L^p(G, m)$ ($1 \leq p < \infty$), $x \rightarrow f_x$ 也是连续的. 但对于 $f \in L^\infty(G)$, 上述结论不成立.

注 3 $C_c(G)$ 是 $C_\infty(G)$ 的子集, $C_c(G)$ 按其范数完备化, 即得 $C_\infty(G)$. 故 $C_c(G)$ 上的有界线性泛函可以扩张到 $C_\infty(G)$ 上, 反之 $C_\infty(G)$ 上的有界线性泛函限制在 $C_c(G)$ 上, 就是 $C_c(G)$ 上的有界线性泛函, 但是作为不变测度 m , 对应于 $C_c(G)$ 上的正线性泛函是左不变的, 不一定有界, 所以不一定能扩张到 $C_\infty(G)$ 上. 即 $m f$ 不一定有意义.

例 若 $G = T \times C$.

(1) 在 G 中定义乘法

$$(a, \beta)(a', \beta') = (aa', a\beta' + \beta),$$

其中 $a, a' \in T$, $\beta, \beta' \in C$, 则 G 是一个拓扑群.

(2) 定义 $f((a, \beta)) = \beta$, 则 f 是右一致连续的, 但不是左一致连续的.

证 (1) 将 G 中元素 (a, β) 和 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相对应, 且 $\begin{vmatrix} a & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \neq 0$. 又由于

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & a\beta' + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

与 G 中乘法相吻合, $\begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, C)$, 故 $\left\{ \begin{pmatrix} a & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in T, \beta \in C \right\}$ 是 $GL(2, C)$ 的子群. 即 G 是一个拓扑群, 且是闭子群.

(2) $f((a, \beta)) = \beta$, 有

$$\begin{aligned} & |f((a, \beta)) - f((a, \beta)(a', \beta'))| \\ &= |f((a, \beta)) - f((aa', a\beta' + \beta))| \\ &= |\beta - a\beta' - \beta| = |a||\beta'| = |\beta'| \quad (a \in T, |a| = 1). \end{aligned}$$

又 G 中单元为 $e = (1, 0)$, 当 $(a', \beta') \in U_\varepsilon \in \mathcal{N}$, 则 $|\beta'|$ 很

小, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U_\varepsilon \in \mathcal{N}_e$, 当 $(\alpha', \beta') \in U_\varepsilon$, 有 $|f((\alpha, \beta)) - f((\alpha, \beta)(\alpha', \beta'))| < \varepsilon$. 故 f 右一致连续.

$$\begin{aligned} \text{但 } & |f((\alpha, \beta)) - f((\alpha', \beta')(\alpha, \beta))| \\ &= |f((\alpha, \beta)) - f((\alpha' \alpha, \alpha' \beta + \beta'))| \\ &= |\beta - \alpha' \beta - \beta'| = |(1 - \alpha')\beta - \beta'|, \end{aligned}$$

因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 无论 (α', β') 如何靠近 e , 总可以取 β , 使 $|\beta|$ 相当大, $|(1 - \alpha')\beta - \beta'| < \varepsilon$. 所以 f 不是左一致连续的.

最后指出, 在拓扑群 G 上考虑积分, Fubini 定理往往不成立. 例如研究积分

$$\iint_G \chi_\Delta(x, y) dx dy,$$

其中 $G = X \times Y$, $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}$. Δ 是乘积空间 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 的对角线, 即 $\Delta = \{(x, y) | x = y\}$. 若在 $X = \mathbf{R}$ 上取通常拓扑, 在 $Y = \mathbf{R}$ 上取离散拓扑, 则

$$\int_Y \left(\int_X \chi_\Delta(x, y) dx \right) dy = \int_Y 0 \cdot dy = 0,$$

$$\int_X \left(\int_Y \chi_\Delta(x, y) dy \right) dx = \int_X 1 \cdot dx = \infty.$$

Fubini 定理不成立. 这是因为 Fubini 定理要求测度是 σ -有限的, 而在 y 上取计数测度显然不是 σ -有限的. 若在上例中, 取 $y = Q$ 是全体有理数的集合, 且取计算测度, 则为 σ -有限的. 这时

$$\int_Y \chi_\Delta(x, y) dy = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数,} \\ 1, & x \text{ 为有理数.} \end{cases}$$

所以 $\int_X \left(\int_Y \chi_\Delta(x, y) dy \right) dx = 0$. Fubini 定理成立.

对于局部紧群 G , 若 $f \in L^1(G)$, 则 f 必在一个 σ -紧集外为零, 所以 f 在 G 上的积分实质上是在一个 σ -紧集上的积分, 又由于测度为正则 Borel 测度, 紧集的测度为有限的, 故测度必为 σ -

有限的；因此对于局部紧群上的可积函数总可以应用Fubini定理。由定理8知，对于局部紧群 G ，必存在一个 σ -紧的开子群。我们常常在子群上考虑积分。

§ 6.4 模函数

G 是局部紧群， G 上存在唯一的左Haar测度 m ，若 $k \in C_0(G)$ ， $m(k) = \int_G k(x) dm(x)$ 且 $m(k_a) = m(k)$ 。

本节研究积分 $\int_G k(xa^{-1}) dm(x)$ 。由于

$$\int_G k_a(xa^{-1}) dm(x) = \int_G k(xa^{-1}) dm(x),$$

亦即 $\int_G k(xa^{-1}) dm(x)$ 是左不变的，故存在 $\Delta(a)$ 使得

$$\int_G k(xa^{-1}) dm(x) = \Delta(a) \int_G k(x) dm(x).$$

显然 $\Delta(a)$ 不依赖于 m 。因为若取测度 n ，则必有 $n = cm$ ，上式两端同乘以 c ，则得

$$\int_G k(xa^{-1}) dn(x) = \Delta(a) \int_G k(x) dn(x).$$

注意到上式对一切 $k \in C_0(G)$ 成立，自然对所有可积函数也成立。

$\Delta(a)$ 具有以下性质：

(1) $0 < \Delta(a) < \infty$ ，显然成立。

(2) $\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$ 。

$$\text{证 } \Delta(ab) \int_G k(x) dm(x) = \int_G k(x(ab)^{-1}) dm(x)$$

$$= \int_G k((xb^{-1})a^{-1}) dm(x) = \Delta(a) \int_G k(xb^{-1}) dm(x)$$

$$= \Delta(a) \Delta(b) \int_G k(x) dm(x).$$

所以 $\Delta(ab) = \Delta(a) \Delta(b)$.

(3) Δ 是连续的.

证 Δ 是 G 到 $(0, \infty)$ 的映射: $a \rightarrow \Delta(a)$. 又 Δ 保持乘法, 故若在 $(0, \infty)$ 中考虑乘法群, 则 Δ 是 $G \rightarrow (0, \infty)$ 的代数同态. 由于拓扑群是齐性的, 故只需证明 $\Delta(a)$ 在 e 处连续. 因为

$$\begin{aligned} & \int_G k(xa^{-1}) dm(x) - \int_G k(x) dm(x) \\ &= (\Delta(a) - \Delta(e)) \int_G k(x) dm(x), \end{aligned}$$

$k(x) \in C_0(G)$, $k(x) \geq 0$, 当 $k(x) \neq 0$, 则 $\int_G k(x) dm(x) \neq 0$. 又由引理 3 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}_e$, 当 $a^{-1} \in U$, 有

$$\int_G |k(xa^{-1}) - k(x)| dm(x) < \varepsilon.$$

所以 $|\Delta(a) - \Delta(e)| < \varepsilon / \int_G k(x) dm(x)$

因此, $\Delta(a)$ 是连续的.

m 是左 Haar 测度, E 是 Borel 集合, 则 $m(aE) = m(E)$, 现在研究 $m(Ea)$ 和 $m(E)$ 的关系.

$$m(Ea) = \int_G \chi_{Ea}(x) dm(x).$$

又 $x \in Ea$, 当且仅当 $xa^{-1} \in E$. 所以

$$\begin{aligned} m(Ea) &= \int_G \chi_E(xa^{-1}) dm(x) \\ &= \Delta(a) \int_G \chi_E(x) dm(x) = \Delta(a) m(E), \end{aligned}$$

即从集合的测度来看 $\Delta(a)$ 满足 $m(Ea) = \Delta(a)m(E)$. 由此得出

$$\int f(x) \Delta(x)^{-1} dm(x) = \int f(x^{-1}) dm(x).$$

利用上式容易证明以下事实.

(1) 若 $f \in L^1(G, m)$, 则 $f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) \in L^1(G, m)$, 且

$$\int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) dm(x) = \int f(x) dm(x).$$

(2) $\Delta^{-1}m$ 是右 Haar 测度. (读者自证).

定义 9 Δ 称为 G 上的模函数. 若对一切 $x \in G$, $\Delta(x) = 1$, 则称 G 为么模群.

定理 11 交换群, 离散群和紧群都是么模群.

证 若 G 是交换群, 显然 $\Delta = 1$. 若 G 是离散群, 则计算测度就是 Haar 测度, 故 $\Delta = 1$. 若 G 是紧群, 则 $\Delta: G \rightarrow (0, \infty)$ 是连续的 $\Delta(G)$ 是 $(0, \infty)$ 的一个紧子群. 又

$$\Delta(a)m(G) = m(Ga) = m(G),$$

而且 $0 < m(G) < \infty$, 所以 $\Delta(a) = 1$ 对一切 $a \in G$ 成立, 即 $\Delta = 1$.

例 $G = \{(x, y) | x > 0, y \in \mathbf{R}\}$, 将 G 中元素 (x, y) 和矩阵 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ 相对应, 按矩阵乘法定义 G 中的乘法, 由于

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & (x')^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & xy' + y(x')^{-1} \\ 0 & (xx')^{-1} \end{pmatrix},$$

G 中乘法定义为 $(x, y)(x', y') = (xx', xy' + y(x')^{-1})$. 于是 $G = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \subset GL(2, \mathbf{R})$.

现在考虑测度 $x^{-2} dx dy$. 若 $f \in C_c(G)$, 定义

$$mf = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{-2} dx dy,$$

$$f((a, b)(x, y)) = f(ax, ay + bx^{-1}).$$

令 $s = ax$, $ds = a dx$, 得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(ax, ay + bx^{-1}) x^{-2} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s, ay + bas^{-1}) as^{-2} ds dy.
 \end{aligned}$$

再令 $t = ay + bas^{-1}$, 则 $dt = a dy$, 于是得到

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s, t) s^{-2} ds dt,$$

即
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f((a, b)(x, y)) x^{-2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) x^{-2} dx dy.$$

积分为左不变的。

又 $f((x, y)(a, b)) = f(xa, xb + ya^{-1}),$

令 $s = xa$, 得

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(xa, xb + ya^{-1}) x^{-2} dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s, sa^{-1}b + ya^{-1}) as^{-2} ds dy.
 \end{aligned}$$

再令 $t = sa^{-1}b + ya^{-1}$, $dt = a^{-1} dy$ 得

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s, t) a^2 s^{-2} ds dt = a^2 m f.$$

所以 $\Delta(a, b) = (a^2)^{-1} = a^{-2}.$

§ 6.5 测度代数 $M(G)$

这一节研究局部紧群 G 上所有有界 Borel 测度的集合 $M(G)$. 显然 $M(G)$ 是一个线性空间. 今在 $M(G)$ 上引入对合. 若 E 是 G 中的 Borel 集, $\mu \in M(G)$. 首先定义 μ' , $\mu'(E) = \mu(E^{-1})$. 则保持加法且周期为 2. 即

$$(\mu + \nu)' = \mu' + \nu' \quad \mu'' = \mu$$

为适合对合中的数乘规律, 定义 $\tilde{\mu}$ 如下:

$$\tilde{\mu}(E) = \overline{\mu'(E)} = \overline{\mu(E^{-1})}.$$

则 $\tilde{\mu}$ 满足

$$(\mu + \nu) \sim \tilde{\mu} + \tilde{\nu}, \quad (\alpha \mu) \sim \overline{\alpha} \tilde{\mu}, \quad \tilde{\tilde{\mu}} = \mu.$$

若 $f \in L^1(G, m)$, 考虑测度 f, m 即 $k \rightarrow \int k f dm$. 由于 $\int |f| dm < \infty$, 故 f, m 是有限测度, $f, m \in M(G)$. 由以上定义

$$\begin{aligned} (f, m)'(E) &= (f, m)(E^{-1}) = \int \chi_{E^{-1}}(x) f(x) dm(x) \\ &= \int \chi_E(x^{-1}) f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) dm(x) \\ &= \int \chi_E(x) f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) dm(x). \end{aligned}$$

即 $(f, m)' = f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) m.$

今定义 $f'(x) = f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}),$

则 $(f, m)' = f', m$ 且由 § 6.4 知 $f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) \in L^1(G, m)$. 同样定义

$$\tilde{f}(x) = \overline{f'(x)} = \overline{f(x^{-1}) \Delta(x^{-1})}$$

则映射 $f \in L^1(G, m) \rightarrow f, m \in M(G)$ 满足

$$(1) f + g \rightarrow (f + g), m, \quad \alpha f \rightarrow (\alpha f), m = \alpha f, m,$$

$$(2) \|f\|_1 = \int |f| dm,$$

$$\|f, m\| = |f, m|(G) = \int |f| dm = \|f\|_1,$$

$$(3) \tilde{f} \rightarrow (f, m) = \tilde{f}, m \quad (\text{因为 } \tilde{f} = \overline{f'(x)}, \tilde{\mu} = \overline{\mu'}).$$

因此 $f \rightarrow f, m$ 是 $L^1(G, m) \rightarrow M(G)$ 的代数同态, 保持对合. $M(G) = C_c(G)^* = C_0(G)^*$, $M(G)$ 是一个 Banach 空间. $L^1(G, m)$ 是 $M(G)$ 的一个闭子空间. 在 $M(G)$ 上再引入乘法, 使 $M(G)$ 成为一个 Banach 代数.

设 $\mu, \nu \in M(G)$, 以 α 记 G 中的乘法, $\alpha(x, y) = xy$, $(x, y \in G)$. 若 $k \in C_c(G)$, 则 $k \circ \alpha$ 是有界连续函数, $\mu * \nu$ 是乘积空间 $G \times G$ 上的有

限测度。则对积分 $\int_{G \times G} k \circ \alpha(x, y) d(\mu * \nu)(x, y)$ 可以应用 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} \int_{G \times G} k \circ \alpha(x, y) d(\mu * \nu)(x, y) &= \int_G \int_G k(xy) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G k(xy) d\nu(y) d\mu(x). \end{aligned}$$

今定义 $(\mu * \nu)k = \int_{G \times G} k \circ \alpha(x, y) d(\mu * \nu)(x, y)$,

容易验证 $\mu * \nu$ 是 $C_0(G)$ 上的有界线性泛函。事实上,

$$(\mu * \nu)(k + h) = (\mu * \nu)k + (\mu * \nu)h,$$

显然.

$$(\mu * \nu)(\alpha k) = \alpha(\mu * \nu)k,$$

$$|(\mu * \nu)k| \leq \int_G \int_G |k(xy)| d|\mu|(x) d|\nu|(y)$$

$$\leq \|k\| \cdot \|\mu\| \|\nu\|.$$

所以 $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \|\nu\|$,

即 $\mu * \nu \in C_0(G)^* = M(G)$. 再研究乘法 $\mu * \nu$. 容易证明必满足乘法的运算规律.

$$(\mu * \nu) * \omega = \mu * (\nu * \omega),$$

$$(\mu + \nu) * \omega = \mu * \omega + \nu * \omega,$$

$$\mu * (\nu + \omega) = \mu * \nu + \mu * \omega,$$

$$\alpha(\mu * \nu) = (\alpha\mu) * \nu = \mu * (\alpha\nu).$$

现只证结合律.

$$[(\mu * \nu) * \omega]k = \iiint k(xy) d(\mu * \nu)(x) d\omega(y),$$

又 $\int h(x) d(\mu * \nu)(x) = \int h(st) d\mu(s) d\nu(t),$

所以 $[(\mu * \nu) * \omega]k = \iiint k(sty) d\mu(s) d\nu(t) d\omega(y).$

$$\begin{aligned}
(\mu * (\nu * \omega))k &= \iint k(xy) d\mu(x) d(\nu * \omega)(y) \\
&= \iiint k(xst) d\nu(s) d\omega(t) d\mu(x),
\end{aligned}$$

因此结合律成立。按以上卷积引入的乘法, $M(G)$ 成为一个 Banach 代数, 称为 G 上的测度代数。

$$\text{令 } M_*(G) = \{f, m \mid f \in L^1(G, m)\},$$

则 $M_*(G)$ 与 $L^1(G)$ 完全相同, $M_*(G)$ 是 $M(G)$ 的一个闭子空间, 在定义了乘法后 $M(G)$ 是一个 Banach 代数。下面将证明 $M_*(G)$ 不仅是一个闭子代数而且是一个理想。

设 $\mu \in M(G)$, $f, m \in M_*(G)$, 那么 $\mu * f, m = ?$ 。若 k 是有界 Borel 函数, 则

$$\begin{aligned}
(\mu * f, m)k &= \iint k(xy) f(y) d\mu(x) dy \\
&= \iint k(y) f(x^{-1}y) d\mu(x) dy.
\end{aligned}$$

若令
$$h(y) = \int f(x^{-1}y) d\mu(x),$$

则得
$$(\mu * f, m)k = \int k(y) h(y) dy.$$

取 $k = 1$, 得
$$(\mu * f, m) \cdot 1 = \int h(y) dy.$$

由此知 $\int h(y) dy$ 存在。由于 μ 是正测度。若 $f \geq 0$, 由 h 的定义知 h 是正的, 故 $\int |h| dy$ 存在。所以 $h \in L^1(G)$ 。若 h 是实函数, 利用 $h = h^+ - h^-$, $|h| = h^+ + h^-$; 若 h 是复函数, 令 $h = u + iv$, 即知 $h \in L^1(G)$ 几乎处处存在。

所以

$$\mu * f, m = h, m, \quad h \in L^1(G).$$

即 $M(G) * M_*(G) \subset M_*(G)$. $M_*(G)$ 是 $M(G)$ 中的左理想.

设 $f \in L^1(G)$, $\nu \in M(G)$, 研究 $f, m * \nu$.

$$(f, m * \nu)k = \iint k(xy) f(x) dx d\nu(y).$$

利用等式 $\int f(xy^{-1}) dx = \Delta(y) \int f(x) dx$,

得 $\int f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) dx = \int f(x) dx$. ($\Delta(y^{-1}) = \Delta(y)^{-1}$)

所以 $(f, m * \nu)k = \iint k(x) f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) dx d\nu(y)$.

令 $r(x) = \int f(xy^{-1}) \Delta(y^{-1}) d\nu(y)$.

同样可以证明 $r(x)$ 几乎处处存在, 且 $r(x) \in L^1(G)$. 因此

$$f, m * \nu = r, m, \quad r \in L^1(G).$$

即 $M_*(G) \times M(G) \subset M_*(G)$.

$M_*(G)$ 是 $M(G)$ 中的右理想. 总结以上讨论得以下定理.

定理12 $M_*(G)$ 是 $M(G)$ 中的双边理想, 且对于 $\mu, \nu \in M(G)$ 和 $f, m \in M_*(G)$, 可以由下式定义 $\mu * f$ 和 $f * \nu$

$$(\mu * f)m = \mu * f, m, \quad (f * \nu)m = f, m * \nu,$$

则 $(\mu * f)(y) = \int f(x^{-1}y) d\mu(x), \quad (1)$

$$(f * \nu)y = \int f(yx^{-1}) \Delta(x^{-1}) d\nu(x), \quad (2)$$

对几乎所有的 $y \in G$ 存在.

下面再研究 $L^1(G)$. 以上指出 $f \in L^1(G) \rightarrow f, m \in M(G)$ 是线性的, 保持范数. 也就是 $L^1(G)$ 和 $M_*(G)$ 完全一样, $L^1(G)$ 就是 $M(G)$ 中的一个理想. 如何在 $L^1(G)$ 中引入乘法? 由于 $f \in L^1(G)$ 与 $f, m \in M_*(G)$ 等同, 自然要由 $M_*(G)$ 中的乘法引出 $L^1(G)$ 中的乘法, 即若 $f, g \in L^1(G)$, 则定义 $f * g$ 如下

$$f, m * g, m = (f * g), m.$$

由(1)式知, 对几乎所有的 y 有

$$\begin{aligned}(f * g)y &= \int g(x^{-1}y) dm f(x) = \int g(x^{-1}y) f(x) dx \\ &= \int f(x) g(x^{-1}y) dx = \int f(yx) g(x^{-1}) dx,\end{aligned}$$

这样定义了乘法后, $L^1(G)$ 是一个 Banach 代数, 称为 G 上的群代数.

以上将 $M_0(G)$ 中的乘法引入 $L^1(G)$ 中, 使 $L^1(G)$ 成为一个群代数. $L^1(G)$ 和 $M_0(G)$ 的代数结构完全一样, 且按卷积引入乘法, 使 $(f * g)y$ 对几乎所有的 y 处处存在. 以卷积定义乘法运算, 自然要考虑卷积的存在性, 例如对任意两个可测函数 f, g 是否可以考虑它们的卷积.

若 $f \in L^1(G)$, $g \in L^\infty(G)$. 则

$$\left| \int f(x) g(x^{-1}y) dx \right| \leq \int |f(x)| |g(x^{-1}y)| dx \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

所以 $f * g \in L^\infty(G)$ 且 $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. 即

$$L^1(G) * L^\infty(G) \subset L^\infty(G).$$

可以证明 $f * g$ 还是左一致连续的. 即任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}$, 当 $a \in U$ 时, 对一切 $x \in G$ 有

$$|(f * g)(ax) - (f * g)(x)| < \varepsilon, \quad (\text{读者自证}).$$

又若 $f, g \in C_0(G)$, $\text{supp} f \subset K$, $\text{supp} g \subset H$, 则由以上讨论知 $f * g$ 是连续的. 又

$$(f * g)(y) = \int f(x) g(x^{-1}y) dx,$$

若 $x \notin K$ 则 $f(x) = 0$, 若 $x^{-1}y \notin H$, 则 $g(x^{-1}y) = 0$. 所以 $\text{supp}(f * g) \subset KH$. 且由于 K, H 是紧集, KH 也是紧的. 即 $f * g \in C_0(G)$.

若 $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 由于 $L^p(G)$, $L^q(G)$ 中的函数可用 $C_0(G)$ 中的函数来逼近, 易证 $f * g \in C_0(G)$.

下面再研究 $M(G)$ 和 $L^1(G)$ 的单元. 若 $\delta \in M(G)$ 定义如下,

$$\delta(k) = k(e), \quad k \in C_0(G).$$

则
$$(\mu * \delta)(k) = \iint k(xy) d\mu(x) d\delta(y).$$

由 δ 的定义知 $\int k(xy) d\delta(y) = k(x)$, 所以

$$(\mu * \delta)(k) = \int k(x) d\mu(x) = \mu(k).$$

同理可得 $(\delta * \mu)(k) = \mu(k)$. 即 $\mu * \delta = \delta * \mu = \mu$. 所以 δ 是 $M(G)$ 的单元. $M(G)$ 是有单元的 Banach 代数.

但 $\delta \notin M_0(G)$. 即不存在 $f \in L^1(G)$ 使 $\delta = f, m$. 只当 G 是离散时是例外的, 此时 $M_0(G) = M(G)$. 事实上, 若 G 是离散的, 则计数测度是 G 上的左不变测度 μ , 且由于离散拓扑下紧集合只能是有限的, 故紧集合的测度是有限的, 也就是计数测度为正则测度. 又 $M(G)$ 中 μ 是有限的, 故 μ 只能在可数个点 a_i ($i = 1, 2, \dots$) 上不为

零, 且 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(a_i)$ 收敛, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(a_i) < \infty$. 此时定义函数 f 满足

$$f(a_i) = \mu(a_i),$$

则 f 关于计数测度是可积的, 于是

$$\mu = f, m, \quad f \in L^1(G).$$

所以 $M(G) = M_0(G)$. 这时 $M_0(G)$ 有单元

$$\delta = \begin{cases} 0, & x \neq e \\ 1, & x = e \end{cases}$$

一般来讲 $L^1(G)$ 也就是 $M_0(G)$ 设有单元, 但可以引入 $L^1(G)$ 的近似单元. 为此先介绍网的概念.

定义10 设 (D, \leq) 是半序集合, 且对任何 $a, b \in D$, 有 $c \in D$ 使得 $a \leq c$, $b \leq c$, 则称 (D, \leq) 是一个有向集.

例如, 设 $V(x)$ 是拓扑空间 (X, J) 中 x 的邻域全体, $V_1(x), V_2(x) \in V(x)$, 当 $V_1 \supset V_2$, 规定 $V_1 \leq V_2$, 则 $(V(x), \leq)$ 是一个有向集.

定义11 设 X 是一个集合, (D, \leq) 是有向集, S 是 D 到 X 的映射, 则 (S, D, \leq) 称为 X 中的一个网.

定义12 设 (S, D, \leq) 是拓扑空间 (X, J) 中的一个网, $x \in X$, 若对 x 的任一邻域 V , 有 $m \in D$, 使当 $n \geq m$ 时 $S(n) \in V$, 则称网 (S, D, \leq) 收敛于 x .

引理5 $f \in L^1(G)$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{N}$, 使得若 $u \in L^1(G)$, $u \geq 0$, $\int u dm = 1$, 在 V^c 上 $u = 0$ 则

$$\|u*f - f\|_1 \leq \varepsilon.$$

证 由于 $y \rightarrow f_y$ 是 $G \rightarrow L^1(G)$ 的连续映射, 选取 $V \in \mathcal{N}$, 使得 $\|f_y - f\|_1 \leq \varepsilon$ 对一切 $y \in V$ 成立.

对任意满足引理条件的 u , 有

$$(u*f)(x) = \int u(y) f(y^{-1}x) dy,$$

又
$$f(x) = \int u(y) f(x) dy, \quad (\text{因 } \int u(y) dy = 1)$$

于是
$$(u*f)(x) - f(x) = \int u(y) [f(y^{-1}x) - f(x)] dy,$$

$$\|u*f - f\|_1 = \int \left| \int u(y) [f(y^{-1}x) - f(x)] dy \right| dx$$

$$\leq \int \int u(y) |f(y^{-1}x) - f(x)| dx dy$$

$$\leq \int u(y) \|f_y - f\|_1 dy \leq \varepsilon \int u(y) dy = \varepsilon. \quad \text{证毕.}$$

定义13 若对于一切 $f \in L^1(G)$, 可找到一个网 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使得当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, $\|u_\alpha*f - f\|_1 \rightarrow 0$, 则称 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为 $L^1(G)$ 的左近似

单元. 若 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使得当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时 $\|f * u_\alpha - f\|_1 \rightarrow 0$, 则称 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为右近似单元. 若 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 既是左近似单元, 又是右近似单元, 则称 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 为双边近似的单元. 若对于每个 $\alpha \in A$, $\|u_\alpha\| \leq s$, 则称近似单元 $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 有界, s 称为近似单元的界.

定理13 $L^1(G)$ 有左近似单元, 且近似单元的界为 1.

证 对 e 的每个紧邻域 V , 选取 $u_V \in C_c^+(G)$, 使得 $\int u_V dm = 1$, 且在 V^c 上 $u_V = 0$.

当 $V_2 \subset V_1$ 定义 $V_1 \leq V_2$, 此时 e 的邻域的全体成为有向集合, $\{u_V\}$ 是一个网. 根据引理 5, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 V_0 , 当 $V \geq V_0$ 时, 成立着

$$\|u_V * f - f\|_1 < \varepsilon,$$

即 $L^1(G)$ 有左近似单元.

由 $\int u_V dm = 1$ 得 $\|u_V\| = 1$. 即近似单元的界为 1. 证毕.

注 $L^1(G)$ 也有右近似单元. 事实上, 若 $f(x) \in L^1(G)$ 则 $f'(x) = \Delta(x^{-1})f(x^{-1}) \in L^1(G)$ 且 $\|f'\|_1 = \|f\|_1$, 故 $f \rightarrow f'$ 是连续映射. 因为 $f' \in L^1(G)$, 所以 $u_V * f' \rightarrow f'$, 从而 $f'' * u'_V \rightarrow f''$, 但 $f'' = f$, 因此得 $f * u'_V \rightarrow f$.

又 $\text{supp } f = K$, $\text{supp } f' = K^{-1}$, 若取 V 为对称邻域, 则 u_V, u'_V 同时满足在 V^c 上为零. 所以 $L^1(G)$ 有左、右近似单元.

定理14 若 G 是交换群, 则 $M(G)$ 也是可交换的.

证 设 $x, y \in G$, 则 $xy = yx$. 又设 $\mu, \nu \in M(G)$, 有

$$\begin{aligned} (\mu * \nu)k &= \iint k(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \iint k(yx) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= (\nu * \mu)k, \end{aligned}$$

即 $\mu * \nu = \nu * \mu$. 定理得证.

定理15 若 $M(G)$ 是可交换的, 则 G 也是可交换的.

证 设 $a \in G$, 定义 $\delta_a(k) = k(a)$, 那么从测度的角度看

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \in E, \\ 0, & \text{当 } a \notin E. \end{cases}$$

$\delta_a = \delta$, 即为 $M(G)$ 中的单元.

若 $a, b \in G$, 有

$$\begin{aligned} (\delta_a * \delta_b)k &= \iint k(xy) d\delta_a(x) d\delta_b(y) = \int k(ay) d\delta_b(y) = k(ab) \\ &= \delta_{ab}(k). \end{aligned}$$

同理 $(\delta_b * \delta_a)k = \delta_{ba}(k)$.

又因 $M(G)$ 是可交换的, $\delta_a * \delta_b = \delta_b * \delta_a$. 所以

$$\delta_{ab} = \delta_{ba},$$

从而有 $ab = ba$. 即 G 是可交换的. 定理得证.

由以上讨论知, 若 G 是可交换群, 则 $M(G)$ 是可交换的, 故 $L^1(G)$ 也是可交换的. 反之, 由 $M(G)$ 是可交换的, 导出 G 也是可交换的. 那么, 若 $L^1(G)$ 是可交换的, 能否导出 G 也是可交换的? 答案是肯定的. 下面证明这个事实.

定理16 对于每个 $\mu \in M(G)$, 定义映射 $T_\mu: L^1(G) \rightarrow L^1(G)$:

$$T_\mu: f \rightarrow \mu * f,$$

即 $T_\mu f = \mu * f$, 则 $T_{\mu \cdot \nu} = T_\mu T_\nu$ 且 $\|T_\mu\| = \|\mu\|$.

证: 容易验证 T_μ 是线性的,

$$T_\mu(f+g) = \mu * (f+g) = \mu * f + \mu * g = T_\mu f + T_\mu g,$$

$$T_\mu(\alpha f) = \mu * (\alpha f) = \alpha(\mu * f) = \alpha T_\mu f,$$

$$\text{又 } T_{\mu \cdot \nu} f = (\mu * \nu) * f = \mu * (\nu * f) = \mu * (T_\nu f) = T_\mu(T_\nu f).$$

$$\text{所以 } T_{\mu \cdot \nu} = T_\mu T_\nu.$$

下面证明 $\|T_\mu\| = \|\mu\|$. 由于

$$\|T_\mu f\|_1 = \|\mu * f\|_1 \leq \|\mu\| \|f\|_1,$$

$$\text{所以 } \|T_\mu\| \leq \|\mu\|.$$

另一方面, 对一切 $f \in L^1(G)$ 且 $\|f\|_1 = 1$. 有

$$\|T_\mu\| \geq \|T_\mu f\|. \quad (3)$$

又由 $\|\mu\| = \sup\{|\mu(k)| \mid \|k\|_\infty \leq 1\}$ 知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in C_0(G)$, $\|k\|_\infty \leq 1$, 使得

$$|\mu(k)| \geq \|\mu\| - \varepsilon. \quad (4)$$

$k \in C_0(G)$ 是一致连续的, 对于 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|\mu\|}$, 可找到单元 e 的邻域 U , U 依赖于 ε' , k , 记作 $U(\varepsilon', k)$, 使得

$$|k(xy) - k(x)| < \varepsilon'$$

对一切 $y \in U(\varepsilon', k) \in \mathcal{N}_e$ 成立.

$T_\mu f \in L^1(G)$ 可以看作是 $M_a(G)$ 中的元, 且

$$(T_\mu f)(k) = (\mu * f)(k) = \iint k(xy) f(y) d\mu(x) dy.$$

今取 f 满足 $f \geq 0$, 在 $U(\varepsilon', k)^c$ 上 $f = 0$ 且 $\|f\|_1 = \int f(y) dy = 1$.

则
$$\mu(k) = \int k(x) d\mu(x) = \iint k(x) f(y) d\mu(x) dy.$$

于是
$$|(\mu * f - \mu)(k)| = \left| \iint [k(xy) - k(x)] f(y) dy d\mu(x) \right|$$

$$\leq \iint |k(xy) - k(x)| f(y) dy d|\mu|(x) < \varepsilon' \|\mu\| = \varepsilon.$$

所以
$$|(\mu * f)k| \geq |\mu(k)| - \varepsilon. \quad (5)$$

由 (3)、(4)、(5) 式得

$$\|T_\mu\| \geq \|T_\mu f\| \geq |(\mu * f)k| \geq |\mu(k)| - \varepsilon \geq \|\mu\| - 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性得 $\|T_\mu\| \geq \|\mu\|$. 定理得证.

定理17 若 $L^1(G)$ 是交换群, 则 G 是交换群.

证 首先证明

$$\delta_{ab} * f * g = \delta_{ba} * f * g$$

对一切 $a, b \in G$, 及一切 $f, g \in L^1(G)$ 是成立的, 其中 δ_{ab} 的定义如同定理15.

容易验证 $(f * g)_a = f_a * g$. 于是

$$\begin{aligned} \delta_{ab} * f * g &= (\delta_b)_a * f * g = (\delta_b * f)_a * g = (f * \delta_b)_a * g \\ &= f_a * \delta_b * g = f_a * (\delta * g)_b = f_a * g_b, \\ \delta_{ba} * f * g &= (\delta_a)_b * f * g = (\delta_a)_b * g * f = (\delta_a * g)_b * f \\ &= (g * \delta_a)_b * f = g_b * \delta_a * f = g_b * f_a. \end{aligned}$$

所以, $\delta_{ab} * f * g = \delta_{ba} * f * g$.

令 $\mu = \delta_{ab} - \delta_{ba}$, 得 $\mu * f * g = 0$ 对一切 $f, g \in L^1(G)$ 是成立的. 又由于 $L^1(G)$ 有近似单元, 取 f 为 $L^1(G)$ 的近似单元, 由乘法的连续性得

$$\mu * g = 0, \quad \forall g \in L^1(G).$$

即对一切 $g \in L^1(G)$, $T_\mu g = 0$. 所以 $T_\mu \equiv 0$. 故 $\|T_\mu\| = \|\mu\| = 0$. 从而 $\mu = 0$, 也就是 $\delta_{ab} = \delta_{ba}$. 所以 $ab = ba$, 即 G 为交换群. 定理得证.

第七章 交换群上的调和分析初步

n 维空间中对平移不变的正则测度必是Lebesgue测度乘以常数因子。调和分析就是建立在Lebesgue测度的平移不变性上，第六章已证明了局部紧拓扑群上Haar测度的存在性，在此基础上我们将调和分析推广到局部紧的交换群 G 上。首先给出特征标群概念，引出 G 上Fourier变换概念并给出反演公式。着重研究拓扑群 G 及其特征标群的关系，给出了Pontryagin对偶定理，同时还讨论商群与子群的特征标群，最后给出了局部紧群的结构定理。

§ 7.1 对偶群

由前一章知，若 G 是局部紧交换群，具有Haar测度 m ，则 $L^1(G, m)$ 是一个可交换的Banach代数，具有近似单元，现在研究 $L^1(G, m)$ 上的Gelfand理论。

令 $\Delta(L^1(G, m)) = \Delta$ 表示 $L^1(G, m)$ 的极大理想空间或结构空间，则 Δ 是一个局部紧的Hausdorff空间，若 $\varphi \in \Delta$ ，则对一切 $f, g \in L^1(G, m)$ ， $x \in G$ 有

$$\begin{aligned}\varphi(f_x)\varphi(g) &= \varphi(f_x * g) = \varphi((f * g)_x) = \varphi((g * f)_x) \\ &= \varphi(g_x * f) = \varphi(g_x)\varphi(f).\end{aligned}$$

因为 $\varphi \neq 0$ ，总可以找到 g 使 $\varphi(g) \neq 0$ 。记 $\overline{\gamma(x)} = \frac{\varphi(g_x)}{\varphi(g)}$ ，

则上式可写成

$$\varphi(f_x) = \overline{\gamma(x)} \varphi(f). \quad (1)$$

这表明，对于一切 $f \in L^1(G, m)$ ，存在 $\gamma: G \rightarrow \mathbf{C}$ ，使得(1)式成立。下面讨论 $\gamma(x)$ 的性质。

(1) $\gamma(x)$ 是连续的.

显然, $x \rightarrow f_x$ 是连续的, φ 是代数同态也是连续的, 所以 $\gamma(x)$ 是连续的.

(2) $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$.

$$\begin{aligned}\text{因为 } \varphi(f_{xy}) &= \overline{\gamma(xy)} \varphi(f) = \varphi((f_y)_x) = \overline{\gamma(x)} \varphi(f_y) \\ &= \overline{\gamma(x)} \overline{\gamma(y)} \varphi(f).\end{aligned}$$

所以 $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$.

(3) $|\gamma(x)| = 1$.

$$\begin{aligned}\text{因为 } |\gamma(x) \varphi(f)| &= |\varphi(f_x)| \leq \|\varphi\| \|f_x\|_1 \leq \|f\|_1, \\ &(\|\varphi\| \leq 1).\end{aligned}$$

所以 $\gamma(x)$ 是有界的. 又 $\gamma(x^*) = \gamma(x)^*$, 因此 $|\gamma(x)| \leq 1$. 又 $\gamma(e) = 1$, $\gamma(x^{-1}) = \gamma(x)^{-1}$. 所以 $|\gamma(x)| = 1$.

归纳以上性质知, γ 是 $G \rightarrow T$ 的一个代数同态, 且为连续的.

引理1 对一切 $\varphi \in L^1(G)^*$, 有

$$\varphi(f * g) = \int f(y) \varphi(g_y) dy, \quad (f, g \in L^1(G)).$$

证 $f, g \in L^1(G)$, 可取 G 的一个 σ -紧子群 G_0 , 在 G_0 外, $f = g = 0$, 于是 $f * g = 0$, $L^1(G_0)^* = L^\infty(G_0)$. 因此给定 $f \in L^1(G)$, 存在 G 上一个有界 Borel 函数 j , 使得

$$\varphi(f * g) = \int (f * g(x)) j(x) dx,$$

且

$$\varphi(g_x) = \int g_y(y) j(y) dy.$$

利用 Fubini 定理得

$$\begin{aligned}\varphi(f * g) &= \iint f(y) g(y^{-1}x) j(x) dx dy \\ &= \int f(y) \left(\int g_y(x) j(x) dx \right) dy = \int f(y) \varphi(g_y) dy.\end{aligned}$$

引理得证.

φ 是代数同态, 利用(1)式及引理1得

$$\varphi(f)\varphi(g)=\varphi(f*g)=\int f(y)\varphi(g_y)dy=\int f(y)\overline{\gamma(y)}\varphi(g)dx,$$

即
$$\varphi(f)=\int f(x)\overline{\gamma(x)}dx. \quad (2)$$

总结以上讨论知, 对于任意的 $\varphi \in \mathcal{A}$, 存在 $G \rightarrow T$ 的连续代数同态 γ , 使得(2)式成立. 反之, 对于每一个 $G \rightarrow T$ 的连续代数同态 γ , 由(2)式定义了一个 $\varphi: L^1(G) \rightarrow T$. 容易验证 $\varphi \in \mathcal{A}$. 事实上对于 $g \in L^1(G)$, $y \in G$, 有

$$\begin{aligned}\varphi(g_y) &= \int g_y(x)\overline{\gamma(x)}dx = \int g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}dx \\ &= \int g(x)\overline{\gamma(yx)}dx = \overline{\gamma(y)} \int g(x)\overline{\gamma(x)}dx \\ &= \overline{\gamma(y)}\varphi(g).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(f*g) &= \int (f*g)(x)\overline{\gamma(x)}dx \\ &= \iint f(y)g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}dydx \\ &= \int f(y)\left(\int g(y^{-1}x)\overline{\gamma(x)}dx\right)dy = \int f(y)\varphi(g_y)dy \\ &= \int f(y)\overline{\gamma(y)}\varphi(g)dy = \varphi(f)\varphi(g).\end{aligned}$$

即 φ 是 $L^1(G) \rightarrow C$ 的一个非零代数同态.

称 γ 为 G 的特征标, 所有连续特征标的集合记作 \hat{G} 或 Γ . 于是(2)式建立了 \mathcal{A} 和 Γ 之间的1-1对应. 再将 \mathcal{A} 上的Gelfand拓扑引到 Γ 上, 即一个集合在 Γ 中是开的当且仅当它在 \mathcal{A} 中所对应的集合是开的. 这样, Γ 就成为一个局部紧的Hausdorff空间, 又Gelfand变换 \hat{f} 定义在 \mathcal{A} 上, $\hat{f}(\varphi)=\varphi(f)$. 自然也可看作 \hat{f} 是定义在 Γ 上,

记作 $\hat{f}(\gamma) = \varphi(f)$, 于是 (2) 式写成

$$\hat{f}(\gamma) = \int f(x) \overline{\gamma(x)} dx.$$

此时, \hat{f} 就叫做 f 的 Fourier 变换.

在 Γ 上再定义乘法

$$(\gamma_1 \gamma_2)(x) = \gamma_1(x) \gamma_2(x),$$

则 Γ 成为一个交换群. 下面将证明 Γ 上群的结构和拓扑结构是相容的, 即 Γ 成为一个拓扑群, 称为特征标群.

定理 1 若 G 是离散的, 则 Γ 是紧的.

证 若 G 是离散的, 则 $M_0(G) = M(G)$, 故 $L^1(G)$ 有单元 χ_0 , 由第三章知其极大理想空间 Δ 是紧的, 所以 Γ 是紧的. 证毕.

定理 2 若 G 是紧的, 则 Γ 是离散的.

证 $\gamma(x)$ 是 G 上的连续函数, G 是紧集合, 故 $\gamma(x)$ 可积, 即 $\gamma(x) \in L^1(G)$ 又 $\hat{\gamma}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 是 Γ 上的连续函数且在 ∞ 处为零, 即 $\hat{\gamma} \in C_0(\Gamma)$.

又 $\hat{\gamma}(\beta) = \int \gamma(x) \overline{\beta(x)} dx$, 其中 $\beta(x) \in \Gamma$, 由 $|\beta(x)| = 1$, 知

$\overline{\beta(x)} = \beta(x)^{-1}$, 所以有

$$\hat{\gamma}(\beta) = \int \gamma(x) \beta^{-1}(x) dx = \int \gamma \beta^{-1}(x) dx.$$

另外, 对一切 $a \in G$ 有

$$\int \gamma(x) dx = \int \gamma(ax) dx = \gamma(a) \int \gamma(x) dx.$$

总可以找到 a 使 $\gamma(a) \neq 1$, 除非 $\gamma = e$. 由此知

$$\int \gamma(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } \gamma \neq e; \\ mG, & \text{当 } \gamma = e. \end{cases}$$

所以
$$\hat{\gamma}(\beta) = \int \gamma \beta^{-1}(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } \beta \neq \gamma; \\ mG, & \text{当 } \beta = \gamma. \end{cases}$$

这表明 $\hat{\gamma} = mG \chi_{(\gamma)}$, 又 $\hat{\gamma} \in C_{\infty}(\Gamma)$, 所以 $\chi_{(\gamma)}$ 是连续函数, 因此单点集合必是开的, 故 Γ 是离散的. 证毕.

引入记号 $A(\Gamma) = \{\hat{f} \mid f \in L^1(G)\}$, 即 $A(\Gamma) = L^1\hat{}(G)$. 由于 $\hat{f} \in C_{\infty}(\Gamma)$, 故知 $A(\Gamma) \subset C_{\infty}(\Gamma)$. 有以下定理.

定理 3 $A(\Gamma)$ 是 $C_{\infty}(\Gamma)$ 的稠密子代数.

证 由 Gelfand 变换的定义知, $A(\Gamma)$ 是 $C_{\infty}(\Gamma)$ 的子代数, $A(\Gamma)$ 分离 Γ 中的点, 而且 $A(\Gamma)$ 不在 Γ 的任何点消失为零.

现在再证明 $A(\Gamma)$ 是对称的, 即若 $\hat{f} \in A(\Gamma)$ 则 $\overline{\hat{f}} \in A(\Gamma)$. 事实上, $f \in L^1(G)$, 则 $f'(x) = f(x^{-1})\Delta(x^{-1}) \in L^1(G)$, 又 G 是可交换的, $\Delta(x) \equiv 1$. 所以 $f(x^{-1}) = f'(x) \in L^1(G)$. 又 $\tilde{f}(x) = \overline{f'(x)} = \overline{f(x^{-1})}$, 故 $\tilde{f}(x) \in L^1(G)$.

$$\begin{aligned}\tilde{\hat{f}}(\gamma) &= \int \tilde{f}(x) \overline{\gamma(x)} dx = \int \overline{f(x^{-1})} \overline{\gamma(x)} dx \\ &= \overline{\int f(x^{-1}) \gamma(x) dx} = \overline{\int f(x) \gamma(x^{-1}) dx} \\ &= \overline{\int f(x) \overline{\gamma(x)} dx} = \overline{\hat{f}(\gamma)}.\end{aligned}$$

所以 $\overline{\hat{f}} \in A(\Gamma)$, 即 $A(\Gamma)$ 是对称的.

由 $A(\Gamma)$ 具有以上性质, 利用 Stone-Weierstrass 定理知 $A(\Gamma)$ 在 $C_{\infty}(\Gamma)$ 中稠密. 定理得证.

定理 4 (1) 若 $\hat{f}(\beta) \in A(\Gamma)$, $x \in G$, 则 $\overline{\beta(x)} \hat{f}(\beta) \in A(\Gamma)$.

(2) 若 $\hat{f} \in A(\Gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, 则 $\hat{f}_{\gamma} \in A(\Gamma)$.

证 (1) 若 $f \in L^1(G)$, $x \in G$, 则 $f_x \in L^1(G)$, $\hat{f}_x(\beta) \in A(\Gamma)$.

$$\begin{aligned}\text{而 } \hat{f}_x(\beta) &= \int f_x(y) \overline{\beta(y)} dy = \int f(x^{-1}y) \overline{\beta(y)} dy \\ &= \int f(y) \overline{\beta(xy)} dy = \int f(y) \overline{\beta(x)} \overline{\beta(y)} dy \\ &= \overline{\beta(x)} \hat{f}(\beta). \quad (1) \text{得证.}\end{aligned}$$

(2) 若 $\hat{f} \in A(\Gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. 由于 Γ 是群, 因此可考虑 \hat{f}_{γ} ,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_\gamma(\beta) &= \widehat{f}(\gamma^{-1}\beta) = \int f(x) \overline{\gamma^{-1}\beta(x)} dx \\
&= \int f(x) \overline{\gamma^{-1}(x)} \overline{\beta(x)} dx = \int f(x) \gamma(x) \overline{\beta(x)} dx \\
&= \int f\gamma(x) \overline{\beta(x)} dx = (\widehat{f\gamma})(\beta).
\end{aligned}$$

又 $f \in L^1(G)$, $\gamma \in \Gamma$ 是连续函数, 故 $f\gamma \in L^1(G)$, 所以 $(f\gamma)^\wedge \in A(\Gamma)$.

引理 2 $(x, \gamma) \rightarrow \gamma(x)$ 是 $G \times \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ 的连续映射.

证 首先证明若 $f \in L^1(G)$, 则 $\widehat{f}_x(\gamma)$ 是 (x, γ) 的连续函数. 事实上

$$|\widehat{f}_x(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma_0)| \leq |\widehat{f}_x(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma)| + |\widehat{f}_{x_0}(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma_0)|.$$

由于

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1,$$

$$\text{所以 } |\widehat{f}_x(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma)| \leq \|\widehat{f}_x - \widehat{f}_{x_0}\|_\infty \leq \|f_x - f_{x_0}\|_1.$$

$f \in L^1(G)$, 则 $x \rightarrow f_x$ 连续, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}_x$, 当 $x \in x_0 U$

有 $\|f_x - f_{x_0}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

又 $\widehat{f}_{x_0}(\gamma)$ 是 γ 的连续函数, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $V \in \mathcal{N}_{\gamma_0}$,

($e \in \Gamma$), 当 $\gamma \in \gamma_0 V$ 有 $|\widehat{f}_{x_0}(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 故当 $x \in x_0 U$,

$\gamma \in \gamma_0 V$ 时有

$$|\widehat{f}_x(\gamma) - \widehat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < \varepsilon.$$

由此知, 当 $f \in L^1(G)$ 则 $(x, \gamma) \rightarrow \widehat{f}_x(\gamma)$ 是 $G \times \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ 的连续映射.

$$\text{又 } \widehat{f}_x(\gamma) = \overline{\gamma(x)} \widehat{f}(\gamma).$$

取定 $(x_0, \gamma_0) \in G \times \Gamma$, 取 $f \in L^1(G)$ 使得 $\hat{f}(\gamma_0) \neq 0$. 由 $\hat{f}(\gamma)$ 的连续性知, 存在 $V \in \mathcal{N}_\gamma$, 当 $\gamma \in \gamma_0 V$ 时, $\hat{f}(\gamma) \neq 0$. 所以

$$\overline{\gamma(x)} = \frac{\hat{f}_*(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)}.$$

又 $\hat{f}_*(\gamma)$ 是 (x, γ) 的连续函数, 故 $\overline{\gamma(x)}$ 是 (x, γ) 的连续函数. 所以 $(x, \gamma) \rightarrow \gamma(x)$ 是 $G \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 的连续映射.

定理5 K 是 G 中的紧集合, $\rho > 0$, 令

$$N(K, \rho) = \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall x \in K\},$$

则 $\beta N(K, \rho) (\beta \in \Gamma)$ 组成 Γ 拓扑的基.

证 首先注意下列事实: 若 X, Y 是拓扑空间, $U \subset X \times Y$ 是开的, 则对每一个紧集 $K \subset X$, 集合 $\{y \in Y \mid K \times \{y\} \subset U\}$ 是开的. (证明与 § 6.1 拓扑群的性质 8 类似)

由这个事实和引理 2 知 $N(K, \rho)$ 是开的. 又 $e \in N(K, \rho)$, 故 $N(K, \rho)$ 是 e 的一个开邻域.

下面证明, 任给 $e \in \Gamma$ 的一个开邻域 W , 可以找到某个 $N(K, \rho)$, 使 $W \supset N(K, \rho)$. $W \subset \Gamma$ 为开集, Γ 中的拓扑是使 \hat{f} 连续的最弱的拓扑, 故存在 $n \in \mathbb{N}$, $f_1, f_2, \dots, f_n \in L^1(G)$, $\delta > 0$ 使得

$$A = \{\gamma \mid |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(e)| < 3\delta\} \subset W.$$

$C_c(G)$ 在 $L^1(G)$ 中稠密, 故存在 $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_c(G)$, 使得

$$\|g_i - f_i\|_1 < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

取 $K = \bigcup_{i=1}^n \text{supp } g_i$, 令 $\rho > 0$ 使得 $\rho \cdot \max \|g_i\|_\infty \cdot mK < \delta$. 作集合

$$B = \{\gamma \mid |\hat{g}_i(\gamma) - \hat{g}_i(e)| < \delta, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{f}_i(e)| &\leq |\hat{f}_i(\gamma) - \hat{g}_i(\gamma)| + |\hat{g}_i(\gamma) \\ &\quad - \hat{g}_i(e)| + |\hat{g}_i(e) - \hat{f}_i(e)| < 3\delta \end{aligned}$$

所以 $B \subset A \subset W$.

又若 $\gamma \in N(K, \rho)$ 则

$$\begin{aligned} |\hat{g}_i(\gamma) - \hat{g}_i(e)| &= \left| \int g_i(x) \overline{\gamma(x)} dx - \int g_i(x) dx \right| \\ &\leq \int |g_i(x)| |\overline{\gamma(x)} - 1| dx = \int |g_i(x)| |\gamma(x) - 1| dx, \end{aligned}$$

当 $x \notin K$, 则 $g_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 当 $x \in K$ 则 $|\gamma(x) - 1| < \rho$, 所以

$$|\hat{g}_i(\gamma) - \hat{g}_i(e)| \leq \|g_i\| \cdot \rho \cdot mK < \delta.$$

因此 $\gamma \in B$, 于是有 $N(K, \rho) \subset B \subset W$.

由此知 $N(K, \rho)$ 组成 Γ 中 e 的邻域的基.

最后再证明对于每一个 $\beta \in \Gamma$, 映射 $\gamma \rightarrow \beta\gamma$ 是 $\Gamma \rightarrow \Gamma$ 的一个同胚映射.

只需证明 $\gamma \rightarrow \beta\gamma$ 是连续的, 则由 $\gamma \rightarrow \beta^{-1}\gamma$ 的连续性即得逆映射也是连续的. 令 γ_λ 是一个网, 且 $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$. 现证 $\beta\gamma_\lambda \rightarrow \beta\gamma$.

$\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ 是 Gelfand 拓扑下的弱收敛, 因此 $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ 当且仅当 $\hat{f}(\gamma_\lambda) \rightarrow \hat{f}(\gamma)$. 又 $\hat{f}(\beta\gamma) = (f\bar{\beta})^\wedge(\gamma)$, 所以

$$\hat{f}(\gamma_\lambda) \rightarrow \hat{f}(\gamma), \quad \forall f \in L^1(G) \iff (f\bar{\beta})^\wedge(\gamma_\lambda) \rightarrow (f\bar{\beta})^\wedge(\gamma),$$

$$\forall f \in L^1(G) \iff \hat{f}(\beta\gamma_\lambda) \rightarrow \hat{f}(\beta\gamma), \quad \forall f \in L^1(G) \iff$$

$$\beta\gamma_\lambda \rightarrow \beta\gamma.$$

因此 $\gamma \rightarrow \beta\gamma$ 是 $\Gamma \rightarrow \Gamma$ 的同胚映射, 故 $\beta N(K, \rho)$ 组成 β 邻域的基. 定理得证.

$\beta N(k, \rho)$ 组成 Γ 中拓扑的基, 这样的拓扑叫做紧开拓扑, 它将紧集合 $K \subset G$ 中的点送到群 Γ 的开集合 $\{z \mid |z - 1| < \rho\}$ 中, 即特征标群 Γ 上的拓扑是紧开拓扑. 由以上证明知, Γ 上的 Gelfand 拓扑和紧开拓扑完全一样.

同理可以证明集合 $\{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \quad \forall \gamma \in C, C \text{ 是 } \Gamma \text{ 中的}\}$

紧集合}是 G 中的开集合, 且显然该集合包含 e . 在§7.4中将证明这个事实.

定理6 Γ 是一个局部紧的交换群.

证 只需证明映射 $(\gamma, \beta) \rightarrow \gamma^{-1}\beta$ 是连续的. 即证明若开集 $W \ni \gamma^{-1}\beta$, 则存在开集 $U \ni \gamma$, 开集 $V \ni \beta$, 使得 $U^{-1}V \subset W$.

因为 $\gamma^{-1}\beta \in W$, 故存在 K, ρ 使得 $\gamma^{-1}\beta N(K, \rho) \subset W$, 令 $U = \gamma N(K, \frac{\rho}{2})$, $V = \beta N(K, \frac{\rho}{2})$, 若 $s \in U$, $t \in V$, 则

$$s = \gamma \xi, \quad \xi \in \Gamma, \quad \text{且对一切 } x \in K \text{ 有 } |\xi(x) - 1| < \frac{\rho}{2};$$

$$t = \beta \eta, \quad \eta \in \Gamma, \quad \text{且对一切 } x \in K \text{ 有 } |\eta(x) - 1| < \frac{\rho}{2}.$$

又 $s^{-1}t = \xi^{-1}\gamma^{-1}\beta\eta = \gamma^{-1}\beta\xi^{-1}\eta$, 其中 $\xi^{-1}\eta \in \Gamma$, 且对一切 $x \in K$ 有

$$|\xi^{-1}\eta(x) - 1| = |\xi^{-1}(x)\eta(x) - 1| = |\xi^{-1}(x)| |\eta(x) - \xi(x)|$$

$$\leq |\eta(x) - 1| + |\xi(x) - 1| < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho, \quad (\because |\xi^{-1}(x)| = 1)$$

所以 $s^{-1}t \in \gamma^{-1}\beta N(K, \rho) \subset W$. 即 $U^{-1}V \subset W$, 所以 $(\gamma, \beta) \rightarrow \gamma^{-1}\beta$ 是连续的. Γ 为拓扑群. 定理得证.

定义1 拓扑群 Γ 称为 G 的对偶群或共轭群 (Dual Group), 记作 $\Gamma = \hat{G}$.

对于 $G = \mathbf{R}$, $G = \mathbf{T}$, $G = \mathbf{Z}$ 的情形已经在第三章中讨论过. 综合以上讨论知, 对于局部紧交换群 G , 得到它的对偶群 \hat{G} 仍为一个局部紧的交换群. 自然可以再考虑 \hat{G} 的对偶群 $\hat{\hat{G}} = \hat{\Gamma}$, 即

$$G \rightarrow \hat{G} = \Gamma \rightarrow \hat{\Gamma}.$$

为研究 $\hat{\Gamma}$ 和 G 的关系, 定义 $G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 的映射 $\alpha: x \rightarrow \alpha(x)$, 如下:

$$\alpha(x)\gamma = \gamma(x),$$

则 $\alpha(xy)\gamma = \gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y),$

$$(\alpha(x)\alpha(y))\gamma = \alpha(x)\gamma \cdot \alpha(y)\gamma = \gamma(x)\gamma(y),$$

所以 $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y).$

再证 α 是连续的。即若 $\{x_i\}$ 是一个网, $x_i \rightarrow x$, 证明 $\alpha(x_i) \rightarrow \alpha(x)$ 。

由于 $\gamma(x)$ 是 x 的连续函数, 当 $x_i \rightarrow x$ 有 $\gamma(x_i) \rightarrow \gamma(x)$ 。由 $\alpha(x)$ 的定义得

$$\alpha(x_i)\gamma \rightarrow \alpha(x)\gamma, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

又由引理 2 知 $(\gamma, \alpha(x)) \rightarrow \alpha(x)\gamma$ 是 $\Gamma \times \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbf{C}$ 的连续映射, 所以 $\alpha(x_i) \rightarrow \alpha(x)$ 。

由以上讨论知 α 是 $G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 的连续的代数同态。在 § 7.4 中还将作进一步的讨论。

§ 7.2 Bochner 定理

定义 2 G 是局部紧交换群, 具有 Haar 测度, $M(G)$ 是相应的测度代数, 具有单元 δ 。对于 $\mu \in M(G)$, 定义 $\hat{\mu}; \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ 如下:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)} d\mu(x), \quad \gamma \in \Gamma.$$

$\hat{\mu}$ 叫做 μ 的 Fourier-Stieltjes 变换。

注 (1) 由 γ 的定义知, $\hat{\mu}$ 定义在 $L^1(G)$ 的极大理想空间 Γ 上, 而不是定义在 $M(G)$ 的极大理想空间上, $M(G)$ 太大, 我们没有考虑它的极大理想空间, 仅仅考虑了 $M(G)$ 的子代数 $M_c(G)$, 故 $\hat{\mu}$ 不是 μ 的 Gelfand 变换。

(2) 若 $\mu = f, m$, 则 $\hat{\mu} = (\hat{f}, m) = \int f(x) \overline{\gamma(x)} dx = \hat{f}$ 。

记 $B(\Gamma) = \{\hat{\mu} \mid \mu \in M(G)\}$ 。本节研究 $B(\Gamma)$ 这个空间的构造。显然 $B(\Gamma) \supset A(\Gamma)$, 且

$$\hat{\delta}(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)} d\delta(x) = \overline{\gamma(e)} = 1.$$

用 $C_b(\Gamma)$ 表示 $\Gamma \rightarrow \mathbf{C}$ 的所有一致连续的有界函数作成的 Banach 代数。

定理 7 Fourier-Stieltjes变换是 $M(G)$ 到 $C_*(\Gamma)$ 内的范数减小的代数同态。

证 显然 $(\mu+\nu)^{\wedge}=\hat{\mu}+\hat{\nu}$, $(\alpha\mu)^{\wedge}=\alpha\hat{\mu}$.
 $(\mu, \nu \in M(G)).$

现在证明 $(\mu*\nu)^{\wedge}=\hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$.

$$\begin{aligned} \text{事实上, } (\mu*\nu)^{\wedge}(\gamma) &= \int \overline{\gamma(x)} d\mu*\nu(x) \\ &= \iint \overline{\gamma(xy)} d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \iint \overline{\gamma(x)} \overline{\gamma(y)} d\mu(x) d\nu(y) = \hat{\mu}(\gamma) \hat{\nu}(\gamma). \end{aligned}$$

故 $\hat{\mu}$ 是一个代数同态。又

$$\|\hat{\mu}\|_{\infty} = \sup\{|\hat{\mu}(\gamma)| \mid \gamma \in \Gamma\}, \quad (|\gamma|=1)$$

而 $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq \int |\overline{\gamma}| d|\mu| = |\mu|(\Gamma) = \|\mu\|,$

所以 $\|\hat{\mu}\|_{\infty} \leq \|\mu\|.$

现在证明 $\hat{\mu} \in C_*(\Gamma)$, 即 $\hat{\mu}$ 一致连续。即证明, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}_e$, 当 $\beta^{-1}\gamma \in U$ 有

$$|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}(\beta)| < \varepsilon.$$

今取 $U = N(K, \rho)$, 其中 $\rho = \rho(\varepsilon)$, 由于 μ 是正则的, 可设 $\mu \geq 0$, 则存在紧集合 $K \subset G$, 使得

$$\mu(G \setminus K) < \rho.$$

当 $\beta^{-1}\gamma \in N(K, \rho)$ 有

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}(\beta)| &= \left| \int (\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}) d\mu(x) \right| \\ &\leq \int |\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| d\mu(x) \end{aligned}$$

$$= \int_K |\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| d\mu(x) + \int_{G \setminus K} |\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| d\mu(x).$$

$$\int_{G \setminus K} |\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| d\mu(x) \leq \int_{G \setminus K} (|\overline{\gamma(x)}|$$

$$+ |\overline{\beta(x)}|) d\mu(x) \leq 2\mu(G \setminus K) < 2\rho.$$

当 $x \in K$ 有

$$|\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| = |\gamma(x) - \beta(x)| = |\beta(x)| |\beta^{-1}\gamma(x) - 1|.$$

又 $|\beta(x)| = 1$, $\beta^{-1}\gamma \in N(K, \rho)$, 故 $|\beta^{-1}\gamma(x) - 1| < \rho$, 所以

$$\int_K |\overline{\gamma(x)} - \overline{\beta(x)}| d\mu(x) < \rho\mu(K) \leq \rho\mu(G) = \rho \|\mu\|.$$

所以 $|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}(\beta)| < 2\rho + \rho \|\mu\|.$

取 $\rho < \frac{\varepsilon}{2 + \|\mu\|}$, 则 $|\hat{\mu}(\gamma) - \hat{\mu}(\beta)| < \varepsilon.$

因此 $\hat{\mu} \in C_*(\Gamma)$. 故 $\mu \rightarrow \hat{\mu}$ 是 $M(G) \rightarrow C_*(\Gamma)$ 的代数同态, 且范数是减少的.]

该定理指出 $B(\Gamma) \subset C_*(\Gamma)$, $B(\Gamma)$ 是 $C_*(\Gamma)$ 的子代数.

引理 3 (1) 若 $\hat{\mu}(\gamma) \in B(\Gamma)$, 则对于任意的 $x \in G$,
 $\overline{\gamma(x)} \hat{\mu}(\gamma) \in B(\Gamma).$

(2) 若 $\hat{\mu}(\gamma) \in B(\Gamma)$, 则 $\overline{\hat{\mu}(\gamma)} \in B(\Gamma)$ 且对每一个 $\gamma \in \Gamma$,
 $\hat{\mu}_\gamma \in B(\Gamma).$

证 (1) $\mu \in M(G)$, 考虑 $\mu_x \in M(G)$, $\mu_x = \delta_x * \mu$, 所以 $\hat{\mu}_x(\gamma)$
 $= \hat{\delta}_x(\gamma) \hat{\mu}(\gamma)$. 又

$$\hat{\delta}_x(\gamma) = \int \overline{\gamma(y)} d\delta_x(y) = \overline{\gamma(x)},$$

故 $\hat{\mu}_x(\gamma) = \overline{\gamma(x)} \hat{\mu}(\gamma) \in B(\Gamma).$

$$\begin{aligned}
(2) \hat{\mu}_\gamma(\beta) &= \hat{\mu}(\gamma^{-1}\beta) = \int \overline{\gamma^{-1}\beta(x)} d\mu(x) \\
&= \int \overline{\gamma^{-1}(x)} \overline{\beta(x)} d\mu(x) \\
&= \int \gamma(x) \overline{\beta(x)} d\mu(x) = (\gamma\mu)^\wedge(\beta) \in B(\Gamma).
\end{aligned}$$

又 $\tilde{\mu}(E) = \overline{\mu'(E)} = \overline{\mu(E^{-1})}$, 所以

$$\begin{aligned}
\widehat{\tilde{\mu}} &= \int \overline{\gamma(x)} d\tilde{\mu}(x) = \int \overline{\gamma(x^{-1})} d\mu(x) \\
&= \int \overline{\gamma(x)^{-1}} d\mu(x) = \int \overline{\gamma(x)} d\mu(x) \\
&= \overline{\hat{\mu}} \in B(\Gamma).
\end{aligned}$$

引理得证.

上一节定义了 $G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 的映射 $\alpha: \alpha(x)\gamma = \gamma(x)$, 给定 $\mu \in M(\Gamma)$, 则 $\hat{\mu}$ 定义在 $\hat{\Gamma}$ 上, 考虑 $\hat{\mu} \circ \alpha$ 记作 $\check{\mu} = \hat{\mu} \circ \alpha$, 则

$$\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(\alpha(x)) = \int \overline{\alpha(x)(\gamma)} d\mu(\gamma) = \int \overline{\gamma(x)} d\mu(\gamma).$$

引理 4 若 $\mu \in M(G)$, $\nu \in M(\Gamma)$, 则 $\int \hat{\mu} d\nu = \int \check{\nu} d\mu$.

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad \int \hat{\mu} d\nu &= \int \hat{\mu}(\gamma) d\nu(\gamma) = \iint \overline{\gamma(x)} d\mu(x) d\nu(\gamma) \\
&= \iint \overline{\gamma(x)} d\nu(\gamma) d\mu(x) = \int \check{\nu} d\mu.
\end{aligned}$$

定理 8 (唯一性定理) 若 $\mu \in M(\Gamma)$, $\check{\mu} = 0$, 则 $\mu = 0$.

证 若 $\check{\mu} = 0$, 则对一切 $f \in L^1(G)$ 有

$$0 = \int \check{\mu} f dm = \int \hat{f} d\mu.$$

又 $A(\Gamma)$ 是 $C_0(\Gamma)$ 的稠密子代数, 故 $\mu = 0$. 定理得证.

定义 3 设 G 是一个群, φ 是 G 上一个复值函数, 若对一切 $x_1, x_2, \dots, x_P \in G, C_1, C_2, \dots, C_P \in \mathbb{C}$ 有

$$\sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \varphi(x_n x_m^{-1}) \geq 0, \quad \forall P \in \mathbb{N}.$$

则称 φ 为正定函数.

例 1 若 $\gamma \in \Gamma$, 则 γ 是正定连续的.

证 $\gamma(x_n x_m^{-1}) = \gamma(x_n) \gamma(x_m^{-1}) = \gamma(x_n) \overline{\gamma(x_m)},$

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \gamma(x_n x_m^{-1}) &= \sum_{n=1}^P C_n \gamma(x_n) \sum_{m=1}^P \overline{C_m} \gamma(x_m) \\ &= \left| \sum_{n=1}^P C_n \gamma(x_n) \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

例 2 $\mu \in M(G), \mu \geq 0$, 则 $\hat{\mu}$ 在 Γ 上是正定连续的.

$$\begin{aligned} \text{证 } \sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \hat{\mu}(\gamma_n \gamma_m^{-1}) &= \sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \int (\gamma_n \gamma_m^{-1})(x) d\mu(x) \\ &= \sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \int \overline{\gamma_n(x)} \gamma_m(x) d\mu(x) \\ &= \int \left| \sum_{n=1}^P C_n \overline{\gamma_n(x)} \right|^2 d\mu(x) \geq 0. \end{aligned}$$

同理, 若 $\mu \in M(\Gamma), \mu \geq 0$, 则 $\check{\mu}$ 在 G 上是正定连续函数.

例 3 若 $k \in C_c(G)$, 则 $k * \tilde{k}$ 是正定连续函数.

$$\text{证 } k * \tilde{k}(x_n x_m^{-1}) = \int k(y) \tilde{k}(y^{-1} x_n x_m^{-1}) dy$$

$$= \int k(y) \overline{k(x_m x_n^{-1} y)} dy = \int k(x_n y) \overline{k(x_m y)} dy$$

$$\sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} k * \tilde{k}(x_n x_m^{-1}) = \sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \int k(x_n y) \overline{k(x_m y)} dy$$

$$= \int \left| \sum_{n=1}^P C_n k(x, y) \right|^2 dy \geq 0.$$

由于 $C_0(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密, 可以知道, 若 $f \in L^2(G)$, 则 $f * \tilde{f}$ 是正定连续函数.

引理 5 G 是交换群, $\varphi: G \rightarrow \mathbf{C}$ 是正定函数, 则

$$(1) \varphi(e) \geq 0.$$

$$(2) \varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}, \quad \forall x \in G.$$

$$(3) |\varphi(x)| \leq \varphi(e), \quad \forall x \in G.$$

(4) 若 $x, y \in G$, 则

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 \leq 2\varphi(e)(\varphi(e) - \operatorname{Re} \varphi(xy^{-1})).$$

证 φ 是 G 上的正定函数, 故

$$\sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \varphi(x_n x_m^{-1}) \geq 0$$

对一切 $P \in \mathbf{N}$, $C_n \in \mathbf{C}$, $x_n \in G$ ($n = 1, 2, \dots, P$) 是成立的.

(1) 取 $P = 1$, $x_1 = e$, $C_1 = 1$, 得 $\varphi(e) \geq 0$.

(2) 取 $P = 2$, $x_1 = e$, $x_2 = x$, $C_1 = 1$, $C_2 = C$, 得

$$(1 + |C|^2)\varphi(e) + \overline{C}\varphi(x^{-1}) + C\varphi(x) \geq 0. \quad (3)$$

又 $(1 + |C|^2)\varphi(e)$ 是实数, 在上式中取 $C = 1$ 得

$$\varphi(x^{-1}) + \varphi(x) \in \mathbf{R}.$$

取 $C = i$, 得 $i(-\varphi(x^{-1}) + \varphi(x)) \in \mathbf{R}$,

从而有 $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$.

(3) 在 (3) 式中取 $|C| = 1$ 且使 $C\varphi(x) = -|\varphi(x)|$, 则得

$$2\varphi(e) - 2|\varphi(x)| \geq 0.$$

所以 $|\varphi(x)| \leq \varphi(e)$.

(4) $x, y \in G$, 不妨设 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. 取 $P = 3$, $x_1 = e$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $C_1 = 1$, $C_2 = \lambda \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\varphi(x) - \varphi(y)}$, 其中 $\lambda \in \mathbf{R}$, $C_3 = -\overline{C_2}$. 且利用 (2) 的结果, 得

$$(1 + 2\lambda^2)\varphi(e) + 2\lambda|\varphi(x) - \varphi(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re} \varphi(xy^{-1}) \geq 0.$$

化简得 $2(\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(xy^{-1}))\lambda^2 + 2|\varphi(x) - \varphi(y)|\lambda + \varphi(e) \geq 0$.

以上 λ 的二次不等式, 对一切 $\lambda \in \mathbf{R}$ 是成立的, 故其判别式是非正的. 即

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 - 2[\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(xy^{-1})]\varphi(e) \leq 0.$$

引理得证.

由以上引理的(4)知, 若 φ 在 e 点连续, 则 φ 在 G 上一致连续. 事实上, φ 在 e 点连续, 则任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $U \in \mathcal{N}_e$, 当 $xy^{-1} \in U$, 有 $|\varphi(e) - \varphi(xy^{-1})| < \varepsilon$. 所以 $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

引理 6 设 $f \in L^1(G)$, φ 是 G 上的连续正定函数, 则

$$\left| \int f \varphi dm \right| \leq \varphi(e) \| \hat{f} \|_{\infty}.$$

证 $f, g \in L^1(G)$. 令 $\langle f, g \rangle = \int (f * \tilde{g}) \varphi dm$, 则

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \iint f(y) \tilde{g}(y^{-1}x) \varphi(x) dy dx \\ &= \iint f(y) \overline{g(x^{-1}y)} \varphi(x) dy dx \\ &= \iint f(xy) \overline{g(y)} \varphi(x) dy dx \\ &= \iint f(x) \overline{g(y)} \varphi(xy^{-1}) dx dy. \end{aligned}$$

$\langle f, g \rangle$ 是一个半内积. 事实上有

(1) $f \rightarrow \langle f, g \rangle$ 是线性的. 显然成立.

(2) $\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle$. 由 $\varphi(x^{-1}) = \overline{\varphi(x)}$ 立即得到.

(3) $\langle f, f \rangle \geq 0$.

因为 $C_c(G)$ 在 $L^1(G)$ 中稠密, 只需证明若 $k \in C_c(G)$,

则 $\langle k, k \rangle = \iint k(x) \overline{k(y)} \varphi(xy^{-1}) dx dy \geq 0$.

由 φ 的一致连续性知, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $W \in \mathcal{N}_e$, 若 $x \in yW$,

则 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$. 又 $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ 是连续的, 存在 $U \in \mathcal{N}$. 使 $UU^{-1} \subset W$. 令 $K = \text{supp } k$, 则 $\text{supp}(k(x) \overline{k(y)}) \subset K \times K$. 又由于 K 是紧集, 存在 $a_1, a_2, \dots, a_p \in K$ 及 K 的互不相交的子集 E_1, E_2, \dots, E_p , 使得

$$K = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p, \text{ 且 } E_n \subset a_n U, \quad n = 1, 2, \dots, p.$$

若 $x \in E_n, y \in E_m$, 则 $xy^{-1} \in a_n a_m^{-1} U U^{-1} \subset a_n a_m^{-1} W$. 故

$$|\varphi(xy^{-1}) - \varphi(a_n a_m^{-1})| \leq \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad & \left| \int_{E_n} \int_{E_m} k(x) \overline{k(y)} \varphi(xy^{-1}) dx dy \right. \\ & \left. - \int_{E_n} \int_{E_m} k(x) \overline{k(y)} \varphi(a_n a_m^{-1}) dx dy \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{E_n} \int_{E_m} |k(x)| |\overline{k(y)}| dx dy \\ & = \varepsilon \int_{E_n} |k(x)| dx \int_{E_m} |k(y)| dy. \end{aligned}$$

令 $C_n = \int_{E_n} k(x) dx$, 并将上式对 n, m 求和, 得

$$|\langle k, k \rangle - \sum_{n, m=1}^p C_n \overline{C_m} \varphi(a_n a_m^{-1})| \leq \varepsilon \left(\int_K |k(x)| dx \right)^2,$$

φ 是正定函数, 所以 $\sum_{n, m=1}^p C_n \overline{C_m} \varphi(a_n a_m^{-1}) \geq 0$, ε 是任意的. 故

$$\langle k, k \rangle \geq 0.$$

以上证明了 $\langle f, g \rangle$ 是半内积, 由 Schwarz 不等式有

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

$$|\int (f * \tilde{f}) \varphi dx| = |\iint f(x) \overline{f(y)} \varphi(xy^{-1}) dx dy|$$

$$\begin{aligned} & \leq \varphi(e) \left(\int |f(x)| dx \right) \left(\int |f(y)| dy \right) \\ & = \varphi(e) \|f\|_1^2. \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad \langle f, f \rangle \leq \varphi(e) \|f\|_1^2. \quad (4)$$

$L^1(G)$ 有近似单元 e_λ , 即当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $f * e_\lambda \rightarrow f$.

$$\text{所以} \quad \left| \int (f * e_\lambda - f) \varphi dm \right| \leq \varphi(e) \|f * e_\lambda - f\|_1 \rightarrow 0.$$

今取 e_λ 满足 $\tilde{e}_\lambda = e_\lambda$, 即 e_λ 为对称的且取实数值, 则

$$\begin{aligned} \left| \int f \varphi dm \right|^2 &= \lim_i \left| \int (f * e_\lambda) \varphi dm \right|^2 = \lim_i |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \\ &\leq \lim_i \langle f, f \rangle \langle e_\lambda, e_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

由(4)式知 $\langle e_\lambda, e_\lambda \rangle \leq \varphi(e) \|e_\lambda\|_1^2 = \varphi(e)$, 故

$$\left| \int f \varphi dm \right|^2 \leq \varphi(e) \langle f, f \rangle = \varphi(e) \int (f * \tilde{f}) \varphi dm. \quad (5)$$

令 $h = f * \tilde{f}$, 则 $\tilde{h} = \tilde{f} * f = h$, $h \in L^1(G)$. (5)式可

$$\text{写成} \quad \left| \int f \varphi dm \right|^2 \leq \varphi(e) \int h \varphi dm.$$

由(5)式知

$$\left| \int h \varphi dm \right|^2 \leq \varphi(e) \int (h * h) \varphi dm = \varphi(e) \int h^2 \varphi dm,$$

上式为一个逆推公式, 其一般形式为

$$\left| \int h^{2^n} \varphi dm \right|^2 \leq \varphi(e) \int h^{2^{n+1}} \varphi dm, \quad (6)$$

反复利用(6)式, 得

$$\begin{aligned} \left| \int f \varphi dm \right|^2 &\leq \varphi(e)^{1 + \frac{1}{2}} \left(\int h^2 \varphi dm \right)^{1/2} \\ &\leq \varphi(e)^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} \left(\int h^4 \varphi dm \right)^{1/4} \\ &\leq \dots \leq \varphi(e)^{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}} \left(\int h^{2^n} \varphi dm \right)^{1/2^n}. \end{aligned}$$

由(4)有 $\left(\int h^{(2^n)} \varphi dm\right)^{1/2^n} \leq \varphi(e)^{1/2^n} \|h^{(2^n)}\|_1^{1/2^n}.$

令 $n \rightarrow \infty$, 利用谱半径定理: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^{(n)}\|_1^{1/n} = \|\hat{f}\|_\infty$, 得

$$|\int f \varphi dm|^2 \leq \varphi(e)^2 \|\hat{h}\|_\infty.$$

又 $\hat{h} = \hat{f} \hat{f} = \hat{f} \overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2$. 所以 $|\int f \varphi dm|^2 \leq \varphi(e)^2 \|\hat{f}\|_\infty.$

引理得证.

定理 9 (Bochner定理). 若 $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}$ 是连续正定函数, 则存在唯一的 $\mu \in M(\Gamma)$, 使得 $\mu = \varphi$, 且 $\mu \geq 0$.

证 唯一性由定理 8 得证. 下面证明存在性, 利用引理 6 定义映射 $T: A(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ 如下:

$$T(\hat{f}) = \int f \varphi dm, \quad f \in L^1(G).$$

由引理 6 知, 若 $\hat{f} = \hat{g}$, 则 $T(\hat{f}) = T(\hat{g})$, 故 T 是有确切意义的. 显然 T 是线性的, 且由引理 6 知, $\|T\| \leq \varphi(e)$. 又 $A(\Gamma)$ 在 $C_\infty(\Gamma)$ 内是稠密的, 故可唯一地将 T 扩张到 $C_\infty(\Gamma)$ 上, 得 $\mu \in C_\infty(\Gamma)^*$, 且

$$\|\mu\| = \|T\| \leq \varphi(e).$$

又 $C_\infty(\Gamma)^* = M(\Gamma)$. 所以 $\mu \in M(\Gamma)$.

$$\int f \varphi dm = T(\hat{f}) = \mu(\hat{f}) = \int \hat{f} d\mu = \int \check{\mu} f dm,$$

即
$$\int f(\varphi - \check{\mu}) dm = 0.$$

由于 $\varphi, \check{\mu}$ 是连续函数, $f \in L^1(G)$ 是任意的, 故 $\check{\mu} = \varphi$.

再证 $\mu \geq 0$. 已知 $\|\mu\| = |\mu|(\Gamma) \leq \varphi(e)$.

$$\check{\mu}(e) = \int \overline{\gamma(e)} d\mu(\gamma) = \int 1 \cdot d\mu(\gamma) = \mu(\Gamma).$$

又 $\check{\mu}(e) = \varphi(e)$. 于是有 $\check{\mu}(e) = \mu(\Gamma) = \varphi(e) \geq |\mu|(\Gamma)$, 故 $|\mu| = \check{\mu}$, 即 $\mu \geq 0$. 定理得证

Bochner定理告诉我们, $B(G) = \{ \check{\mu} \mid \mu \in M(\Gamma) \}$ 是 G 上连续正定函数的所有的有限线性组合张成的空间.

§ 7.3 反演公式

引理7 (1) 若 $f \in L^1(G)$, $\check{\mu} \in B(G)$, 则 $f * \check{\mu} = (\hat{f}' \mu)^\vee$.

(2) $L^1(G) \cap B(G)$ 是 $L^1(G)$ 中的稠密子集.

证 (1) $f \in L^1(G)$, $\check{\mu}$ 是有界连续函数, $\check{\mu} \in L^\infty(G)$, 所以 $f * \check{\mu} \in L^\infty(G)$, 且

$$\begin{aligned} (f * \check{\mu})(x) &= \int f(y) \check{\mu}(y^{-1}x) dy = \iint f(y) \overline{\gamma(y^{-1}x)} d\mu(\gamma) dy \\ &= \iint f(y) \gamma(y) \overline{\gamma(x)} d\mu(\gamma) dy \\ &= \iint f(y^{-1}) \overline{\gamma(y)} \overline{\gamma(x)} d\mu(\gamma) dy \\ &= \iint f'(y) \overline{\gamma(y)} \overline{\gamma(x)} dy d\mu(\gamma) \\ &= \int \hat{f}'(\gamma) \overline{\gamma(x)} d\mu(\gamma) = (\hat{f}' \mu)^\vee(x). \end{aligned}$$

故 $f * \check{\mu} \in B(G)$, 即 $L^1(G) * B(G) \subset B(G)$.

(2) 若 $u \in C_c(G)$, 由 § 7.2 例 3 知 $u * \tilde{u}$ 是正定连续函数, 故 $u * \tilde{u} \in B(G)$. 又 $u \in C_c(G)$, 则 $u \in L^1(G)$, 所以 $u * \tilde{u} \in L^1(G)$. 因此 $u * \tilde{u} \in B(G) \cap L^1(G)$.

另外, 不妨取 u 为对称的且 $u = \tilde{u}$, 令 $U = \text{supp } u$, 则 $\text{supp } (u * \tilde{u}) = \text{supp } u^2 \subset U^2$.

$L^1(G)$ 中有近似单元 e_λ , 按以上讨论可以取 $e_\lambda \in L^1(G) \cap B(G)$.

对于每一个 $f \in L^1(G)$ 有 $f = \lim_n (f * e_n)$. 由 $f \in L^1(G)$, $e_n \in L^1(G)$ 知 $f * e_n \in L^1(G)$. 又由 $f \in L^1(G)$, $e_n \in B(G)$ 知 $f * e_n \in B(G)$. 所以 $f * e_n \in L^1(G) \cap B(G)$, 即 $L^1(G) \cap B(G)$ 在 $L^1(G)$ 中是稠密的. 证毕.

定理10 (反演定理).

(1) 若 $f \in L^1(G) \cap B(G)$, 则 $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.

(2) Γ 上存在唯一的 Haar 测度 m_Γ , 使得

$$f(x) = \int \hat{f}(\gamma) \gamma(x) dm_\Gamma(\gamma). \quad (\text{反演公式})$$

证 若 $f \in B(G)$ 则 $f' \in B(G)$, 由 Bochner 定理知, 存在唯一的 $\mu_f \in M(G)$, 使得 $\check{\mu}_f = f'$. 注意我们所要证明的反演公式可以写成

$$f'(x) = f(x^{-1}) = \int \overline{\gamma(x)} \hat{f}(\gamma) dm_\Gamma(\gamma) = (\hat{f} m_\Gamma)^\vee,$$

因此问题在于确定 m_Γ 使 $\mu_f = (\hat{f} m_\Gamma)^\vee$. 由唯一性定理知, 只需确定 m_Γ 使 $m_\Gamma = \mu_f / \hat{f}$. 为此需证明对任意的 $f, g \in L^1(G) \cap B(G)$

有 $\mu_f / \hat{f} = \mu_g / \hat{g}$. 事实上,

$$(\hat{f} \mu_g)^\vee(x) = \int \overline{\gamma(x)} \hat{f}(\gamma) d\mu_g(\gamma),$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \hat{f}(\gamma) \overline{\gamma(x)} &= \int f(y) \overline{\gamma(y)} \overline{\gamma(x)} dy \\ &= \int f(y) \overline{\gamma(xy)} dy = \int f(x^{-1}y) \overline{\gamma(y)} dy \\ &= \int f_*(y) \overline{\gamma(y)} dy = \hat{f}_*(\gamma), \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad (\hat{f} \mu_g)^\vee(x) = \int \hat{f}_*(\gamma) d\mu_g(\gamma).$$

再利用引理 4 得

$$\begin{aligned}(\hat{f}\mu_g)^\sim(x) &= \int f_z(y) \tilde{\mu}_g(y) dy = \int f_z(y) g'(y) dy \\ &= \int f(x^{-1}y) g(y^{-1}) dy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理, } (\hat{g}\mu_f)^\sim(x) &= \int g(x^{-1}y) f(y^{-1}) dy \\ &= \int g(x^{-1}y^{-1}) f(y) dy = \int g(y^{-1}) f(x^{-1}y) dy.\end{aligned}$$

$$\text{故 } \hat{f}\mu_g = \hat{g}\mu_f.$$

若 $\psi \in C_c(\Gamma)$, 取 $\gamma \in \text{supp}\psi$, 则存在 $u \in C_c(G)$ 使得 $\hat{u}(\gamma) \neq 0$. 又 $u * \tilde{u} = |u|^2$ 所以 $u * \tilde{u} \geq 0$ 且 $u * \tilde{u}(\gamma) > 0$. 又 $u * \tilde{u}$ 是连续的正定函数, $\hat{u * \tilde{u}}$ 也是连续的, 且在 γ 处 $\hat{u * \tilde{u}}(\gamma) > 0$, 故存在 γ 的一个邻域, 在该邻域上 $\hat{u * \tilde{u}} > 0$. 又 $\text{supp}\psi$ 是紧的, 故存在有限个这种邻域将 $\text{supp}\psi$ 盖住, 即存在

$$f = \sum_{i=1}^n u_i * \tilde{u}_i,$$

使得 $\hat{f} \geq 0$ 且在 $\text{supp}\psi$ 上 $\hat{f} > 0$.

由以上讨论知, 若 $\psi \in C_c(\Gamma)$, 则存在连续的正定函数 $f \in L^1(G)$, 使得 $\hat{f} \geq 0$ 且在 $\text{supp}\psi$ 上 $\hat{f} > 0$. 于是 ψ/\hat{f} 是有意义的, 在 $\text{supp}\psi$ 上连续且在 $(\text{supp}\psi)^\circ$ 上, $\psi/\hat{f} = 0$.

引入记号 “ $\psi \prec f$ ”, 它表示 $\psi \in C_c(\Gamma)$, f 是连续正定函数, $\hat{f} \geq 0$ 且在 $\text{supp}\psi$ 上, $\hat{f} > 0$.

若 $\psi \prec f$, ψ/\hat{f} 有意义. 若 $\psi \prec g$, 则 ψ/\hat{g} 也有意义. 又

$$\int \psi/\hat{f} d\mu_f = \int \frac{\psi}{\hat{f} \hat{g}} \hat{g} d\mu_f = \int \frac{\psi}{\hat{f} \hat{g}} \hat{f} d\mu_g = \int \psi/\hat{g} d\mu_g.$$

这说明 $\int \psi/\hat{f} d\mu_f$ 与 f 的选取无关, 因此可以定义映射: $T: C_c(\Gamma)$

$\rightarrow C$ 如下,

$$T(\psi) = \int \psi / \hat{f} d\mu_f. \quad (\psi \prec f)$$

T 是线性的. 事实上, 若 $\psi_1, \psi_2 \in C_c(\Gamma)$, 则存在连续正定函数 $f, f \geq 0$, 且在 $(\text{supp} \psi_1) \cup (\text{supp} \psi_2)$ 上 $\hat{f} > 0$, 于是 $\psi_1 \prec f, \psi_2$

$\prec f, \psi_1 + \psi_2 \prec f$, 且 $\frac{\psi_1 + \psi_2}{\hat{f}} = \frac{\psi_1}{\hat{f}} + \frac{\psi_2}{\hat{f}}$, 所以

$$T(\psi_1 + \psi_2) = T(\psi_1) + T(\psi_2).$$

T 是正的. 因为 $\hat{f} \geq 0$ 且 $\check{\mu}_f = f'$, 而 f' 也是连续的正定函数, 由 Bochner 定理知, f 所对应的测度 μ_f 是正的, 故若 $\psi \geq 0$ 则 $T(\psi) \geq 0$.

T 是不变的, 即 $T(\psi_r) = T(\psi)$. 事实上, 若在 $\text{supp} \psi$ 上 $\hat{f} > 0$, 则在 $\text{supp} \psi_r$ 上, $\hat{f}_r > 0$. 由 $\psi_r(\beta) \neq 0$ 即 $\psi(\gamma^{-1}\beta) \neq 0$ 得 $\gamma^{-1}\beta \in \text{supp} \psi$, 所以 $\hat{f}(\gamma^{-1}\beta) > 0$ 即 $\hat{f}_r(\beta) > 0$. 又

$$\begin{aligned} (f_r)\hat{(\beta)} &= \int f(x) \gamma(x) \overline{\beta(x)} dx \\ &= \int f(x) \overline{\gamma^{-1}\beta(x)} dx = \hat{f}(\gamma^{-1}\beta) = \hat{f}_r(\beta). \end{aligned}$$

因此, 若 $\psi \prec f$, 则 $\psi_r \prec rf$.

$$T(\psi_r) = \int \frac{\psi_r}{\gamma f} d\mu_{rf} = \int \frac{\psi_r}{\hat{f}_r} d\mu_{rf} = \int \left(\frac{\psi}{\hat{f}} \right)_r d\mu_{rf}.$$

又若 $h \in L^1(G)$ 有

$$\begin{aligned} \int \hat{h} d\mu_{rf} &= \int h \check{\mu}_{rf} dm = \int h(\gamma f)' dm = \int h \overline{\gamma} f' dm = \int h \overline{\gamma} \check{\mu}_f dm \\ &= \int (h \overline{\gamma})\hat{ } d\mu_f = \int \hat{h}_r d\mu_f = \int \hat{h}_{r^{-1}} d\mu_f, \end{aligned}$$

$\hat{h} \in A(\Gamma)$, 又 $A(\Gamma)$ 在 $C_\infty(\Gamma)$ 中稠密, 故上式对 $C_\infty(\Gamma)$ 中的函数

也是成立的. 又 $\frac{\psi}{f} \in C_\infty(\Gamma)$. 所以

$$T(\psi_r) = \int \left(\frac{\psi}{f} \right)_r d\mu_{rf} = \int \left(\left(\frac{\psi}{f} \right) \right)_{r^{-1}} d\mu_f = \int \frac{\psi}{f} d\mu_f = T(\psi),$$

由以上讨论知 T 是正线性泛函, 由 Riesz 表示定理知, 存在一个不变测度和 T 相对应, 该测度即为 m_r .

事实上, 令 $\psi \in C_0(\Gamma)$, $f \in L^1(G) \cap B(G)$, $\psi \prec g$, 则

$$\int \psi d\mu_f = \int \frac{\psi}{g} \widehat{g} d\mu_f = \int \frac{\psi}{g} \widehat{f} d\mu_g = T(\psi \widehat{f}),$$

$$\text{又} \quad T(\psi \widehat{f}) = \int \psi \widehat{f} dm_r$$

$$\text{所以} \quad \int \psi d\mu_f = \int \psi \widehat{f} dm_r.$$

$$\text{即} \quad \widehat{f} m_r = \mu_f.$$

又 μ_f 是有限测度, 因此 $\widehat{f} \in L^1(\Gamma)$. (1) 得证.

$L^1(G) \cap B(G)$ 在 $L^1(G)$ 中是稠密的, 故总可以取 $f \in L^1(G) \cap B(G)$ 使 $\mu_f \neq 0$, 又 ψ 是连续函数, 可取 ψ 使

$$T(\psi \widehat{f}) = \int \psi d\mu_f \neq 0.$$

$T \neq 0$, 所以 $m_r \neq 0$. 即 m_r 是不等于零的不变测度, 也就是 m_r 是 Haar 测度. 且

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x^{-1}) = \check{\mu}_f(x^{-1}) = \int \overline{r(x^{-1})} d\mu_f(r) = \int r(x) d\mu_f(r) \\ &= \int \widehat{f}(r) r(x) dm_r(r). \end{aligned} \quad (2) \text{得证.}$$

例 1 G 是紧测, 取测度 m_G 使 $m_G(G) = 1$, 则 m_r 是 Γ 上的计数

测度.

证 取 $\gamma_0 \in \Gamma$, γ_0 是连续的正定函数, 由反演公式得

$$\gamma_0(x) = \int \hat{\gamma}_0(\gamma) \gamma(x) dm_\Gamma(\gamma)$$

由定理2知, 当 G 为紧集时,

$$\hat{\gamma}_0(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \gamma = \gamma_0, \\ 0, & \text{当 } \gamma \neq \gamma_0. \end{cases}$$

所以 $\gamma_0(x) = \int \chi_{\{\gamma_0\}}(\gamma) \gamma(x) dm_\Gamma(\gamma) = \gamma_0(x) m_\Gamma(\{\gamma_0\})$,

故 $m_\Gamma(\{\gamma_0\}) = 1$, 即 m_Γ 为计数测度.

例2 G 是离散的, 取 m_G 为计数测度, 则 $m_\Gamma(\Gamma) = 1$.

证 G 是离散的, 则 $\chi_{\{e\}}$ 是 $L^1(G)$ 中的单元, 且为 G 上的正定连续函数. 这是因为

$$\chi_{\{e\}}(x_n x_m^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_n = x_m; \\ 0, & \text{当 } x_n \neq x_m. \end{cases}$$

$$\sum_{n,m=1}^P C_n \overline{C_m} \chi_{\{e\}}(x_n x_m^{-1}) = \sum_{n=1}^P C_n \overline{C_n} \geq 0.$$

又 $\hat{\chi}_{\{e\}}(\gamma) = 1$, 由反演公式有

$$1 = \chi_{\{e\}}(e) = \int 1 \cdot \gamma(e) dm_\Gamma(\gamma) = \int dm_\Gamma(\gamma) = m_\Gamma(\Gamma).$$

例3 $G = \mathbf{R}$ (实数加法群), 已知 $\hat{G} = \Gamma = \mathbf{R} (y \rightarrow e^{iy})$, 在 \mathbf{R} 上有 Lebesgue 测度 m , 取 $m_G = am$, $a > 0$, 取 $m_\Gamma = bm$, $b > 0$, 则 $ab = \frac{1}{2\pi}$.

证 取 $g \geq 0$ 且 $g \in L^1(\Gamma)$, 则 \check{g} 是连续的正定函数, $\check{g} \in B(G)$. 又取 $g \geq 0$, $g \in L^1(\Gamma)$ 且 g 为连续函数, 同时 $\check{g} \in L^1(G)$, 则 $\check{g} \in L^1(G) \cap B(G)$, 由反演公式有

$$\check{g}(x) = \int \check{g}^{\wedge}(y) e^{iyx} dm_r(y) \quad (dm_r(y) = b dy)$$

$$\check{g}'(x) = \check{g}(-x) = \int \check{g}^{\wedge}(y) e^{-iyx} dm_r(y) = \check{g}^{\wedge\vee}(x),$$

g 是连续的, g' 也连续, 又 $g^{\vee\wedge}$ 连续, 由唯一性定理知 $g' = g^{\vee\wedge}$.

今取 $g(y) = e^{-|y|}$, 显然 g 是连续的, $g \in L^1(\Gamma)$, $g \geq 0$

$$\check{g}(x) = b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} e^{-iyx} dy = \frac{2b}{1+x^2}.$$

所以 $\check{g}(x) \in L^1(G)$.

$$\text{故} \quad g(-y) = g'(y) = (\check{g}^{\vee})^{\wedge}(y) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2b}{1+x^2} e^{-iyx} dx.$$

$$\text{即} \quad e^{-|y|} = 2ab \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-iyx} dx.$$

令 $y = 0$ 得

$$1 = 2ab \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi ab.$$

$$\text{因此} \quad ab = \frac{1}{2\pi}.$$

通常, R 上的 Fourier 变换取 $a = 1$, $b = \frac{1}{2\pi}$ 或 $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 由此得出

$$\pi e^{-|y|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-iyx} dx. \quad (y \in R)$$

§ 7.4 Pontryagin对偶定理

在§ 7.1中为研究群 G 与 $\widehat{\Gamma}$ 的关系, 引入了 G 到 $\widehat{\Gamma}$ 的映射 α : $\alpha(x)\gamma = \gamma(x)$, 证明了 α 是 G 到 $\widehat{\Gamma}$ 的连续的代数同态. 本节将进一步证明 α 是1-1映射, α 是映上 $\widehat{\Gamma}$ 的, 且为同胚映射. 从而得知 G 和 $\widehat{\Gamma}$ 作为拓扑群是完全一样的. 此即Pontryagin对偶定理.

定理11 对于 $e \in G$ 的每一个邻域 V , 存在一个紧集合 $C \subset \Gamma$ 和 $\rho > 0$, 使得 $\{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\} \subset V$.

证 G 是局部紧的, 映射 $(x, y) \rightarrow xy^{-1}$ 是连续的, 故存在 e 的一个紧邻域 W , 使得 $WW^{-1} \subset V$. W 是紧的且包含非空开集, 所以 $0 < mW < \infty$.

令 $f = \chi_W / \sqrt{mW}$, 显然 $f \in L^1(G)$ 同时 $f \in L^2(G)$, 令 $g = f * \widetilde{f}$, 则 $g \in L^1(G)$ 且为正定的连续函数, 即 $g \in L^1(G) \cap B(G)$. 由反演公式得

$$g(x) = \int \widehat{g}(\gamma) \gamma(x) d\gamma,$$

$$g(e) = \int \widehat{g}(\gamma) d\gamma.$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad g(e) &= f * \widetilde{f}(e) = \int f(x) \widetilde{f}(x^{-1}) dx \\ &= \int f(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{mW} \int \chi_W dx = 1. \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \int \widehat{g}(\gamma) d\gamma = 1,$$

$$\widehat{g} = \widehat{f} \cdot \widehat{\widetilde{f}} = \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{f}} = |\widehat{f}|^2 \geq 0.$$

\widehat{g} 是连续的, $\widehat{g} \in C_0(\Gamma)$, 若 $x \notin WW^{-1}$, $g(x) = 0$, 故存在紧集

$C \subset \Gamma$, 使得

$$\int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma) d\gamma < \frac{1}{3}.$$

取 $\rho = \frac{1}{3}$, 若 $x \in G$ 使得 $|\gamma(x) - 1| < \frac{1}{3}$ 对一切 $\gamma \in C$ 成立, 则

$$\begin{aligned} g(x) - 1 &= g(x) - g(e) = \int_{\Gamma} \hat{g}(\gamma)(\gamma(x) - \gamma(e)) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} \hat{g}(\gamma)(\gamma(x) - 1) d\gamma, \end{aligned}$$

$$|g(x) - 1| \leq \int_{\Gamma} \hat{g}(\gamma) |\gamma(x) - 1| d\gamma$$

$$= \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma) |\gamma(x) - 1| d\gamma + \int_C \hat{g}(\gamma) |\gamma(x) - 1| d\gamma.$$

$$\int_C \hat{g}(\gamma) |\gamma(x) - 1| d\gamma < \frac{1}{3} \int_C \hat{g}(\gamma) d\gamma \leq \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \hat{g}(\gamma) d\gamma = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma) |\gamma(x) - 1| d\gamma \leq 2 \int_{\Gamma \setminus C} \hat{g}(\gamma) d\gamma < \frac{2}{3},$$

即 $|g(x) - 1| < 1$.

故 $g(x) \neq 0$, 即 $x \in WW^{-1} \subset V$. 定理得证.

推论 1 $x_0 \{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}$, $C \subset \Gamma$ 且为紧集, $\rho > 0$, $x_0 \in G$, 构成域 G 的拓扑的基.

证 $\gamma(x)$ 是 (x, γ) 的连续函数, 故集合 $\{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}$ 是开集且包含 e , 因此它是 e 的开邻域, 所以

$$x_0 \{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}$$

是 x_0 的开邻域, 它们组成 G 的拓扑的基, 由此知, G 的拓扑也是紧开拓扑.

推论 2 $\alpha: G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 是 1-1 映射.

证 若 $x \neq y$, 即 $x^{-1}y \neq e$, 可以作 $V \in \mathcal{N}_e$, 使 $x^{-1}y \notin V$, 由定理 11 知, 存在一个紧集合 $C \subset \Gamma$ 及 $\rho > 0$, 且有某个 $\gamma \in C$, 使得

$$|\gamma(x^{-1}y) - 1| \geq \rho.$$

即存在 $\gamma \in \Gamma$, 使得 $\gamma(x^{-1}y) \neq 1$, 所以 $\gamma(x) \neq \gamma(y)$, 即 $\alpha(x) \neq \alpha(y)$, 故 α 是 1-1 映射.

这个推论说明特征标群 Γ 相当大, 可以分离 G 中的点.

推论 3 设 H 是 G 的闭子群, $x \notin H$, 则存在 $\gamma \in \Gamma$ 满足 $\gamma(x) \neq 1$, 且在 H 上 $\gamma = 1$.

证 作商群 G/H . 由 § 6.2 知, 取 G/H 中的拓扑, 是使映射 $\pi: G \rightarrow G/H$ 为连续的拓扑.

当 $x \notin H$, 则 $\dot{x} \neq \dot{e}$ 故存在 $\beta \in (G/H)^\wedge$ 使得 $\beta(\dot{x}) \neq 1$. 又 $\beta \circ \pi: G \rightarrow T$ 是连续的同态映射, 且

$$\beta \circ \pi(x) = \beta(\dot{x}) \neq 1,$$

$$\beta \circ \pi(h) = \beta(\dot{h}) = \beta(\dot{e}) = 1, \quad h \in H$$

故 $\beta \circ \pi = \gamma \in \Gamma$ 即为所求.

推论 4 α 是 $G \rightarrow \alpha(G) \subset \hat{\Gamma}$ 的同胚映射.

证 $\alpha(e)$ 在 $\alpha(G)$ 中的邻域为

$$\begin{aligned} & \{\varphi \in \hat{\Gamma} \mid |\varphi(\gamma) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C, C \subset \Gamma \text{ 且为紧集合}\} \cap \alpha(G) \\ &= \{\alpha(x) \mid |\alpha(x)\gamma - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\} \\ &= \{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}. \end{aligned}$$

这也是 G 中 e 的邻域, 所以 α 是同胚映射.

引理 8 若 H 是 Hausdorff 拓扑群 G 的局部紧子群, 则 H 是闭的.

证 H 是局部紧群, 故 H 中的单元 e 存在一个紧邻域 W , H 是 G 的子空间, 所以 $W = V \cap H$, 其中 V 是 G 中单元 e 的邻域. W 在 H 中是紧的, 故 W 在 G 中也是紧的. 而 G 是 T_2 空间, 从而 W 是 G 中的闭集.

设 $a \in \overline{H}$, aV^{-1} 是 a 的开邻域, 故 $aV^{-1} \cap H \neq \emptyset$. 设 $b \in aV^{-1} \cap H$,

任给 $U \in \mathcal{N}_0$, 则 $U \cap bV \in \mathcal{N}_0$, 故

$$U \cap bV \cap H \neq \phi.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } a \in \overline{bV \cap H} &= \overline{bV \cap bH} = \overline{b(V \cap H)} = b \overline{(V \cap H)} \\ &= b(V \cap H) \subset bH. \end{aligned}$$

又 $b \in H$, 故 $bH = H$. 由此知若 $a \in \overline{H}$, 则 $a \in H$. 因此 H 是闭集. 引理得证.

定理12 (Plancherel定理) 存在唯一的 $L^2(G)$ 到 $L^2(\Gamma)$ 的线性等距满射 F , 当 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 时 F 就是 f 的 Fourier 变换. 即 $Ff = \hat{f}$.

证 设 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 由于 $f \in L^2(G)$ 知 $f * \tilde{f}$ 是正定连续函数, 于是 $f \in L^1(G) \cap B(G)$, 由反演定理, 有

$$f * \tilde{f}(e) = \int (f * \tilde{f})^\wedge(\gamma) \gamma(e) d\gamma.$$

$$\text{又 } \gamma(e) = 1, (f * \tilde{f})^\wedge = \hat{f} \hat{\tilde{f}} = \hat{f} \cdot \overline{\hat{f}} = |\hat{f}|^2,$$

$$\text{上式化为 } f * \tilde{f}(e) = \int |\hat{f}|^2 d\gamma.$$

另一方面,

$$f * \tilde{f}(e) = \int f(y) \tilde{f}(y^{-1}e) dy = \int f(y) \overline{f(y)} dy = \int |f(y)|^2 dy,$$

$$\text{所以有 } \int |f(y)|^2 dy = \int |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

以上说明, 若 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, 则 $\hat{f} \in L^2(\Gamma)$ 且 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. 也就是说, f 到 \hat{f} 的映射是线性的, 且保持范数.

$L^1(G) \cap L^2(G)$ 稠密于 $L^2(G)$. $f \rightarrow \hat{f}$ 是定义在 $L^2(G)$ 的稠密子空间 $L^1(G) \cap L^2(G)$ 上的等距线性映射, 它可以唯一地扩张为 $F: L^2(G) \rightarrow L^2(\Gamma)$, F 是等距线性映射, 以 R_F 表示 F 的值域, 由于 $L^2(G)$ 是完备的, F 是等距线性映射, 所以 R_F 是完备空

间 $L^2(\Gamma)$ 的完备子空间, 从而 R_F 是闭的.

下面证明 $R_F = L^2(\Gamma)$. 只需证明, 若 $\varphi \in R_F^\perp$, 则 $\varphi = 0, a, e$.

若 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, $x \in G$, 则 $\hat{f}_x \in R_F$ 故 $\varphi \perp \hat{f}_x$. 即

$$\begin{aligned} 0 &= \int \hat{f}_x(\gamma) \overline{\varphi(\gamma)} d\gamma = \int \hat{f}(\gamma) \overline{\varphi(\gamma)} \overline{\gamma(x)} d\gamma \\ &= (\hat{f} \overline{\varphi})^\vee(\gamma), \end{aligned}$$

由唯一性定理得 $\hat{f} \overline{\varphi} = 0$.

对于每一个紧集 $C \subset \Gamma$, 存在 $f \in C_c(G)$, 使得在 C 上 $\hat{f} > 0$, 从而在 C 上几乎处处有 $\varphi = 0$, 又 $\varphi \in L^2(\Gamma)$, 所以在 σ -紧集外 $\varphi = 0$. 于是得 $\varphi = 0, a, e$.

定理13 (Parseval公式) 若 $f, g \in L^2(G)$, 则

$$\int f(x) \overline{g(x)} dx = \int \hat{f}(\gamma) \overline{\hat{g}(\gamma)} d\gamma, \quad (7)$$

$$\int f(x) g(x^{-1}) dx = \int \hat{f}(\gamma) \hat{g}(\gamma) d\gamma. \quad (8)$$

证 由第四章 §4.1 中的极化公式知, Hilbert 空间的内积可用范数表示. 又 $f \rightarrow \hat{f}$ 是等距线性映射. 公式(7)得证. 由(7)式即可证明(8)式, 事实上,

$$\begin{aligned} \int f(x) g(x^{-1}) dx &= \int f(x) \overline{\overline{g(x^{-1})}} dx \\ &= \int f(x) \overline{\tilde{g}(x)} dx = \int \hat{f}(\gamma) \overline{\tilde{\hat{g}}(\gamma)} d\gamma \\ &= \int \hat{f}(\gamma) \overline{\overline{\hat{g}(\gamma)}} d\gamma = \int \hat{f}(\gamma) \hat{g}(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad \text{证毕.}$$

引理9 若 $g \in L^2(G)$, $\gamma \in \Gamma$, 则 $\gamma g \in L^1(G)$, 且

$$(\gamma g)^\wedge = \hat{g}_\gamma.$$

证 以上结论对 $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 是成立的, 又 $L^1(G) \cap L^2(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密, 故对 $g \in L^2(G)$ 结论仍成立.

引理10 若 $f, g \in L^2(G)$, 则 $fg \in L^1(G)$ 且 $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

$$\begin{aligned} \text{证 } \beta \in \Gamma, (\widehat{fg})(\beta) &= \int f(x)g(x) \overline{\beta(x)} dx \\ &= \int f(x) \overline{(\beta \widehat{g})(x)} dx = \int \widehat{f}(\gamma) \overline{(\beta \widehat{g})(\gamma)} d\gamma \\ &= \int \widehat{f}(\gamma) \overline{\widehat{g}(\beta^{-1}\gamma)} d\gamma = \int \widehat{f}(\gamma) \overline{\widehat{g}'(\gamma^{-1}\beta)} d\gamma \\ &= \int \widehat{f}(\gamma) \widehat{\overline{g}}(\gamma^{-1}\beta) d\gamma = \int \widehat{f}(\gamma) \widehat{g}(\gamma^{-1}\beta) d\gamma \\ &= (\widehat{f} * \widehat{g})(\beta). \end{aligned}$$

定理14 $A(\Gamma) = \{f_1 * f_2 \mid f_1, f_2 \in L^2(\Gamma)\}$.

证 由定义 $A(\Gamma) = \{\widehat{f} \mid f \in L^1(G)\}$, 若取 $f_1, f_2 \in L^2(\Gamma)$, 则存在 $g_1, g_2 \in L^2(G)$, 使得 $\widehat{g_1} = f_1, \widehat{g_2} = f_2$. 从而

$$f_1 * f_2 = \widehat{g_1} * \widehat{g_2} = \widehat{g_1 g_2} \in A(\Gamma),$$

即 $A(\Gamma) \supset \{f_1 * f_2 \mid f_1, f_2 \in L^2(\Gamma)\}$.

反之, 设 $h \in A(\Gamma)$, 则存在 $f \in L^1(G)$ 使得 $\widehat{f} = h$. 且存在 $g_1, g_2 \in L^2(G)$, 使得 $f = g_1 g_2$, 于是

$$h = \widehat{f} = \widehat{g_1 g_2} = \widehat{g_1} * \widehat{g_2},$$

其中 $\widehat{g_1}, \widehat{g_2} \in L^2(\Gamma)$. 这表明 $A(\Gamma) \subset \{f_1 * f_2 \mid f_1, f_2 \in L^2(\Gamma)\}$,

所以 $A(\Gamma) = \{f_1 * f_2 \mid f_1, f_2 \in L^2(\Gamma)\}$.

定理15 若 $K \subset \Gamma$ 是紧集, $V \subset \Gamma$ 是开集, 且 $K \subset V$, 则存在 $h \in A(\Gamma)$, $0 \leq h \leq 1$, 在 K 上 $h = 1$, 在 V^c 上 $h = 0$.

证 可以构造一个开集 W 包含 K , \bar{W} 是紧的且含于 V , 即 $K \subset W \subset \bar{W} \subset V$.

取单元 e 的紧对称邻域 U , 使得 $KU \subset W$, 且 $\bar{W}U \subset V$. 由于紧集的测度是有限的, 故 $\chi_{\bar{W}}, \chi_U \in L^2(\Gamma)$, 从而 $\chi_{\bar{W}} * \chi_U \in A(\Gamma)$. 又

$$\chi_{\bar{W}} * \chi_U(\gamma_0) = \int \chi_{\bar{W}}(\gamma) \chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0) d\gamma.$$

当 $\gamma \in \bar{W}$ 且 $\gamma^{-1}\gamma_0 \in U$, 则被积函数不等于零, 又 $\gamma^{-1}\gamma_0 \in U$ 即 $\gamma \in \gamma_0 U^{-1} = \gamma_0 U$. 所以当 $\gamma \in \bar{W} \cap \gamma_0 U$ 时被积函数为1, 否则被积函数为零. 故

$$\int \chi_{\bar{W}}(\gamma) \chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0) d\gamma = m_r(\bar{W} \cap \gamma_0 U).$$

若 $\gamma_0 \in K$, 则 $\gamma_0 U \subset \bar{W}$, 所以 $m_r(\bar{W} \cap \gamma_0 U) = m_r(\gamma_0 U) = m_r(U)$. 若 $\gamma_0 \notin V$, 则 $\gamma_0 U \cap \bar{W} = \emptyset$. 否则若 $\beta \in \gamma_0 U \cap \bar{W}$ 则 $\beta \in \bar{W}$, 且 $\beta \in \gamma_0 U$. 则 $\gamma_0 = \beta u^{-1} \in \bar{W}U \subset V$, 与 $\gamma_0 \notin V$ 矛盾. 故

$m_r(\bar{W} \cap \gamma_0 V) = 0$. 即

$$\int \chi_{\bar{W}} * \chi_U(\gamma) d\gamma = \int \chi_{\bar{W}}(\gamma) \chi_U(\gamma^{-1}\gamma_0) d\gamma = \begin{cases} m_r(U), & \gamma_0 \in K; \\ 0, & \gamma_0 \notin V. \end{cases}$$

取 $h = \frac{\chi_{\bar{W}} * \chi_U}{m_r(U)}$ 即为所求. 证毕.

推论5 若 A 、 B 可测, 且测度不等于零, 则 $(AB)^\circ \neq \emptyset$.

证 因 A 、 B 的测度不等于零, 故可找到 $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$. 且 $0 < m(A_1) < \infty$, $0 < m(B_1) < \infty$. 因此存在紧集合 C, D , 使得 $C \subset A_1 \subset A$, $D \subset B_1 \subset B$ 且 $mC > 0$, $mD > 0$, 则 $\chi_C * \chi_D$ 是连续函数, 且在某一点大于0, 故 AB 中含非空开集.

定理16 α 是 G 到 $\hat{\Gamma}$ 上的满射.

证 设 $\alpha(G) \neq \hat{\Gamma}$, 则 $[\alpha(G)]^\circ$ 是非空开集. 在 $[\alpha(G)]^\circ$ 中任取一点 φ . $\{\varphi\}$ 是紧的, $\{\varphi\} \subset [\alpha(G)]^\circ$. 由定理15知, 存在 $h \in$

$A(\hat{\Gamma})$ 使得在 $\{\varphi\}$ 上 $h \neq 0$. 在 $[(\alpha(G))^{\circ}]^{\circ} = \alpha(G)$ 上 $h = 0$. 又 $h = \hat{g}$, $g \in L^1(\Gamma)$, 所以在 G 上 $\hat{g} = 0$. 由唯一性定理知 $g = 0$, 从而 $h = 0$. 此与 $h \neq 0$ 矛盾. 定理得证.

至此证明了 $\alpha: G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 是连续的代数同态, α 是 1-1 的且为 G 到 $\hat{\Gamma}$ 上的同胚映射. 由此得到以下重要结论.

定理 17 (Pontryagin 对偶定理) $\alpha: G \rightarrow \hat{\hat{G}}$ 是拓扑群的同构映射. 即 G 和 $\hat{\hat{G}}$ 作为拓扑群是完全一样的. 记作 $G \cong \hat{\hat{G}}$.

注 1 定理 5 给出 $\beta N(K, \rho)$ 组成 Γ 拓扑的基, 其中 $N(K, \rho) = \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall x \in K, K \subset G \text{ 是紧集}, \rho > 0\}$. 若再考虑 Γ 的特征标群 $\hat{\Gamma}$, 同样对 $\rho > 0$, $C \subset \Gamma$ 是紧集, $N(C, \rho) = \{\varphi \in \hat{\Gamma} \mid |\varphi(\gamma) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}$ 也是 $\hat{\Gamma}$ 中单元 e 的开邻域.

$\alpha: G \rightarrow \hat{\Gamma}$ 是拓扑群的同构映射, 即 $\hat{\Gamma} = G$. 由于 $\varphi = \alpha(x)$, $\varphi(\gamma) = \gamma(x)$, 故

$$N(C, \rho) = \{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall \gamma \in C\}$$

是 G 中单元 e 的开邻域. 这就是定理 11 的推论 1 的结论.

注 2 $\mu \in M(\Gamma)$. $\check{\mu} = \int \overline{\gamma(x)} d\mu(\gamma)$. 自然可以定义

$\hat{\mu}: \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C}$ 如下: $\hat{\mu}(\varphi) = \int \overline{\varphi(\gamma)} d\mu(\gamma)$. 又 $\varphi = \alpha(x)$ 且

$\varphi(\gamma) = \alpha(x)\gamma = \gamma(x)$, 得 $\hat{\mu}(\varphi) = \check{\mu}(x)$ 由此可知

$B(\hat{\Gamma}) = \{\hat{\mu} \mid \mu \in M(\Gamma)\}$, $B(G) = \{\check{\mu} \mid \mu \in M(\Gamma)\}$, 二者是完全一样的.

推论 6 若 $\mu \in M(G)$ 且 $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma)$ 则 $\mu \in M_a(G)$. 即 $\hat{\mu} = f, m$, 其中 $f \in L^1(G)$. 且 $\hat{\mu} = \hat{f}$

证 $B(\Gamma) = \{\hat{\mu} \mid \mu \in M(G)\}$. 由于 $\hat{\mu} \in L^1(\Gamma)$. 故 $\hat{\mu} \in$

$L^1(\Gamma) \cap B(\Gamma)$, 由反演公式知 $\widehat{\widehat{\mu}} = L^1(\widehat{\Gamma})$, 且

$$\widehat{\mu}(\gamma) = \int \widehat{\widehat{\mu}}(\varphi) \varphi(\gamma) d\varphi,$$

故
$$\widehat{\mu}'(\gamma) = \int \widehat{\widehat{\mu}}(\varphi) \varphi(\gamma^{-1}) d\varphi = \int \widehat{\widehat{\mu}} \overline{\varphi(\gamma)} d\varphi = \widehat{\widehat{\widehat{\mu}}},$$

即 $\widehat{\mu} = \widehat{\widehat{\widehat{\mu}}}'$. 今定义 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \widehat{\widehat{\mu}}'(\alpha(x)) = \widehat{\widehat{\mu}}(\alpha(x)^{-1}).$$

则
$$f'(x) = \widehat{\widehat{\mu}}(\alpha(x)),$$

所以
$$f'(x) = \int \widehat{\mu}(\gamma) \overline{\alpha(x)\gamma} d\gamma = \int \widehat{\mu}(\gamma) \overline{\gamma(x)} dx.$$

故
$$\widehat{f'}(x) = \int f'(x) \overline{\gamma(x)} dx = \iint \widehat{\mu}(\gamma_0) \overline{\gamma_0(x)} \overline{\gamma(x)} d\gamma_0 dx.$$

$$= \iint \widehat{\mu}(\gamma_0) \overline{\varphi(\gamma_0)} \overline{\varphi(\gamma)} d\gamma_0 d\varphi$$

$$= \iint \widehat{\widehat{\mu}}(\varphi) \overline{\varphi(\gamma)} d\varphi = \widehat{\widehat{\widehat{\mu}}},$$

即
$$\widehat{f} = \widehat{\widehat{\widehat{\mu}}}' = \widehat{\mu}.$$

又因为 $f(x) = \widehat{\widehat{\mu}}(\alpha(x)^{-1})$, 所以 $f(x) \in L^1(\widehat{\Gamma})$, 即 $f(x) \in L^1(G)$. 且 $f(x) \in B(\widehat{\Gamma})$ 即 $f(x) \in B(G)$. 故 $f(x) \in L^1(G) \cap B(G)$.

由反演定理及以上推论, 得出以下结论.

定理18 若 $f \in L^1(G)$, 则 $f \in B(G)$ 的充要条件是 $\widehat{f} \in L^1(\Gamma)$.

由该定理知, 若记 $A_1 = \{f \in L^1(G) \mid \widehat{f} \in L^1(\Gamma)\}$, 则 A_1 与 $L^1(G) \cap B(G)$ 是完全一致的.

推论7 $\mu \in M(G)$, 若 $\widehat{\mu} = 0$ 则 $\mu = 0$.

证 将 G 看成 Γ 的特征标群, 则 $\widehat{\widehat{\mu}} = \mu$. 由唯一性定理得 $\mu =$

0.

推论8 $M(G)$ 是半单纯的.

证 $\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ 是 μ 的Fourier—stieltjes变换,

$\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma(x) d\mu(x)$. 则任给 $\gamma \in \Gamma$, 映射

$$\varphi_\gamma: \mu \rightarrow \hat{\mu}(\gamma)$$

是 $M(G) \rightarrow \mathbb{C}$ 的非零代数同态.

事实上, 任给 $\gamma \in \Gamma$, 总可以取 μ 使 $\hat{\mu}(\gamma) \neq 0$. 且显然有 $(\mu + \nu)^\wedge = \hat{\mu} + \hat{\nu}$, $(\mu * \nu)^\wedge = \hat{\mu} \hat{\nu}$.

假设 $\varphi(\mu) = 0$ 对一切 $\varphi \in \mathcal{M}(M(G))$ 成立, 则由于 $\varphi_\gamma \in \mathcal{M}(M(G))$ 得 $\varphi_\gamma(\mu) = 0$ 对一切 $\gamma \in \Gamma$ 成立, 亦即 $\hat{\mu}(\gamma) = 0$. 所以 $\mu = 0$, 故 $M(G)$ 是半单纯的.

推论9 $L^1(G)$ 是半单纯的.

推论10 $L^1(G)$ 具有单元的充分必要条件是 G 是离散的.

证 若 G 是离散的, 则 $M_*(G) = M(G)$, $L^1(G)$ 有单元. 反之, 若 $L^1(G)$ 有单元, 则其极大理想空间 Γ 是紧的, 故 $\hat{\Gamma}$ 是离散的 (见§7.1). 再由对偶定理知 G 是离散的.

利用推论10我们研究 G 的紧化问题. 若 G 是局部紧的交换群, Γ 是 G 的特征标群, 仍为局部紧的交换群. 若对群 Γ 取离散拓扑, 则 Γ 是具有离散拓扑的交换群, 记作 Γ_* , 则 $\hat{\Gamma}_*$ 是紧的, 记作 \overline{G} , 即 $\hat{\Gamma}_* = \overline{G}$, \overline{G} 称为 G 的Bohr紧化.

今定义映射 $\beta: G \rightarrow \overline{G}$ 如下:

$$\beta(x)\gamma = \gamma(x)$$

显然若 G 是紧的, 则 Γ 是离散的, 故 $\Gamma_* = \Gamma$, 所以由对偶定理知 $\overline{G} = G$, 因此 $\beta = \alpha$. 现给出 β 的性质.

(1) β 是 $G \rightarrow \overline{G}$ 的1-1映射.

因 Γ 分离 G 中的点, 若 $\beta(x) \neq \beta(y)$ 则 $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ 所以 $x \neq y$.

(2) β 是 $G \rightarrow \overline{G}$ 的同构映射. 显然成立.

(3) β 是连续的 (读者自证).

(4) $\beta(G)$ 稠密于 \overline{G} (读者自证).

$\beta(G)$ 稠密于 \overline{G} , 是指对于 Γ_0 上的每一个特征标 φ , 都可以找到 Γ 上的连续特征标 ψ 逼近 φ . 这是因为 Γ_0 是离散拓扑, 连续特征标群就是特征标群. \overline{G} 上的拓扑是紧开拓扑, 可用 $N(C, \rho)$ 描述 ψ 逼近 φ , Γ_0 是离散的, Γ_0 中的紧集合就是有限集合, 故 $\beta(G)$ 在 \overline{G} 中稠密是指对 $\hat{\Gamma}_0$ 中的每一个 φ , 对于有限多个 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma_0$ 和 $\rho > 0$, 存在 Γ 上的连续特征标 ψ , 使得

$$|\varphi(\gamma_i) - \psi(\gamma_i)| < \rho, \quad \forall i.$$

记
$$\text{Trig}(G) = \left\{ \sum_{n=1}^p c_n \gamma_n \mid c_n \in \mathbf{C}, \gamma_n \in \Gamma \right\}.$$

显然当 $G = \mathbf{R}$ 时, $\text{Trig}(G)$ 就是 \mathbf{R} 上的三角多项式.

推论 11 若 G 是紧的, 则 $\text{Trig}(G)$ 在 $C(G)$ 中是稠密的.

证 显然 $\text{Trig}(G)$ 是 $C(G)$ 中的一个子代数, $\text{Trig}(G) \ni 1$. 因 γ 分离 G 中的点, 故 $\text{Trig}(G)$ 分离 G 中的点. 若 $\gamma \in \Gamma$ 则 $\overline{\gamma} \in \Gamma$, 故若 $f \in \text{Trig}(G)$ 则 $\overline{f} \in \text{Trig}(G)$. 由 Stone-Weierstrass 定理知 $\text{Trig}(G)$ 在 $C(G)$ 中是稠密的.

定义 4 $f \in C(G)$, 若 $f \in \text{Cl}(\text{Trig}(G))$, 则称 f 为殆周期函数 (Almost periodic function).

记 $AP(G) = \{f \mid f \in C(G) \text{ 且 } f \text{ 为殆周期函数}\}$, 由推论 11 知, 若 G 是紧的, 则 $AP(G) = C(G)$. 可以证明以下事实 (证明从略).

(1) 若 $f \in C(\overline{G})$, 则 $f|_{B(G)} = AP(G)$.

(2) 若 $g \in AP(G)$, 则 g 可以扩张成 \overline{G} 上的连续函数 f , 即 $f \in C(\overline{G})$.

(3) \overline{G} 就是 $AP(G)$ 的极大理想空间.

§ 7.5 商群和子群的特征标群

G 是局部紧交换群, H 是 G 的闭子群, 本节研究商群 G/H 的特征标群 $\widehat{G/H}$ 及 H 的特征标群 \widehat{H} .

定义 5 称 $H^\perp = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = 1, \forall x \in H\}$ 为 H 的零化子 (Annihilator).

显然, 对于某个固定的 $x \in H$, 由 $\gamma(x)$ 是 (x, γ) 的连续函数知 $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = 1\}$ 是闭集, 所以

$$H^\perp = \bigcap_{x \in H} \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) = 1\}$$

是闭集.

又 H^\perp 是 Γ 的一个子群. 事实上, 若 $\gamma_1 \in H^\perp, \gamma_2 \in H^\perp$, 则 $\gamma_1 \gamma_2(x) = \gamma_1(x) \gamma_2(x), \forall x \in H$. 所以 $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in H^\perp$. 由于 $\gamma^{-1}(x) = \overline{\gamma(x)}$, 所以若 $\gamma \in H^\perp$, 则 $\gamma^{-1}(x) \in H^\perp$, 因此 H^\perp 是一个群.

由以上讨论知 H^\perp 是 Γ 的闭子群.

同理, 若 Λ 是 Γ 的闭子群, 记

$$\Lambda_\perp = \{x \in G \mid \gamma(x) = 1, \forall \gamma \in \Lambda\}.$$

则 Λ_\perp 是 G 的闭子群. 称 Λ_\perp 为 Λ 的零化子.

定理 19 $(H^\perp)_\perp = H$.

证 若 $x \in H$, 则对一切 $\gamma \in H^\perp$ 有 $\gamma(x) = 1$, 所以 $x \in (H^\perp)_\perp$, 即 $H \subset (H^\perp)_\perp$.

若 $x \notin H$, 考虑映射 $\pi: G \rightarrow G/H$, 即 $x \rightarrow \pi(x) = xH$. 若 $\beta \in \widehat{G/H}$, 则 $\beta \circ \pi \in \widehat{G}$. 由于 $x \notin H$ 即 $\dot{x} = \pi x \neq \dot{e}$, 故存在 $\beta \in \widehat{G/H}$ 使得 $\beta \dot{x} \neq 1$. 这是因为连续特征标分离点.

记 $\gamma = \beta \circ \pi$. 由于当 $y \in H$ 则 $\pi y = \dot{e}$, 故在 H 上 $\gamma = 1$ 即 $\gamma \in H^\perp$, 且 $\gamma \neq 1$. 由此知, 若 $x \notin H$, 则存在 $\gamma \in H^\perp$ 使得 $\gamma(x) \neq 1$, 所以 $x \notin (H^\perp)_\perp$. 即若 $x \notin H$ 则 $x \notin (H^\perp)_\perp$, 故 $(H^\perp)_\perp \subset H$. 定理得证.

上面考虑映射 $\pi: G \rightarrow G/H$, 若 $\beta \in \widehat{G/H}$ 则 $\beta \circ \pi \in \widehat{G}$, 这样, 引入

了一个 $\widehat{G/H} \rightarrow \widehat{G}$ 的映射 $\widehat{\pi}$, 定义如下.

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}: \widehat{G/H} &\rightarrow \widehat{G}, \\ \beta &\rightarrow \widehat{\pi}\beta = \beta \circ \pi.\end{aligned}$$

下面讨论映射 $\widehat{\pi}$. 由于 π 是 G 到 G/H 的满射, 所以 $\widehat{\pi}$ 是 1-1 的. 事实上, 若 $\widehat{\pi}\beta = \widehat{\pi}\beta'$, 则 $\beta \circ \pi = \beta' \circ \pi$, 因为 G/H 中的每一个元素都可以写成 πx , 故 $\beta \circ \pi(x) = \beta' \circ \pi(x)$, 即 $\beta(\pi x) = \beta'(\pi x)$, 所以 $\beta = \beta'$.

又 $\widehat{\pi}(\beta_1 \beta_2) = (\beta_1 \beta_2) \circ \pi = (\beta_1 \circ \pi)(\beta_2 \circ \pi) = \widehat{\pi}(\beta_1) \widehat{\pi}(\beta_2)$. 因此 $\widehat{\pi}$ 是一个代数同态.

再求 $\widehat{\pi}(\widehat{G/H})$. 若 $\beta \in \widehat{G/H}$, $\widehat{\pi}\beta = \beta \circ \pi$, 且若 $x \in H$, 则 $\pi x = e$, 故 $\beta(\pi x) = 1$, 即 $\widehat{\pi}\beta(x) = 1$, 所以 $\widehat{\pi}\beta \in H^\perp$. 即

$$\widehat{\pi}(\widehat{G/H}) \subset H^\perp.$$

又若 $\gamma \in H^\perp$, 寻求 $\beta \in \widehat{G/H}$, 使 $\widehat{\pi}\beta = \gamma$. 由于 $\widehat{\pi}$ 是 1-1 的, 故 β 是唯一的. 今定义为.

$$\beta(\pi x) = \gamma(x),$$

这样定义是有确切意义的. 事实上, 若 $\pi x = \pi y$, 则 $x^{-1}y \in H$, 故 $\gamma(x^{-1}y) = 1$ 即 $\gamma(x)^{-1}\gamma(y) = 1$. 所以 $\gamma(x) = \gamma(y)$. 这样一来, 对每个 $\gamma \in H^\perp$ 有 $\beta \in \widehat{G/H}$ 与之对应. 因此

$$\widehat{\pi}(\widehat{G/H}) = H^\perp.$$

以上说明 $\widehat{\pi}$ 是 $\widehat{G/H} \rightarrow H^\perp$ 上的同构映射. 再证明 $\widehat{\pi}$ 是同胚映射. 为此先证明以下引理.

引理11 H 是 G 的闭子群, π 是 $G \rightarrow G/H$ 的同态映射, 若 Y 是 G/H 中的紧集, 则存在着 G 中的紧集 X , 使得 $\pi X = Y$.

证 以 $e_G, e_{G/H}$ 分别表示 G 与 G/H 中的单元, 令 u 是 e_G 的一个紧邻域, 由于 π 是连续的开映射, 故 πu 是 $e_{G/H}$ 的一个紧邻域.

Y 是 G/H 中的紧子集, 故存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^n \pi(x_i u) \supset Y.$$

$$\text{令 } X = \pi^{-1}Y \cap \left(\bigcup_{i=1}^n (x_i, u) \right),$$

由于 π 是连续的, $\pi^{-1}Y$ 是闭的. 又 x, u 是紧的, 故 X 是紧集合, 且 $\pi X = Y$. 引理得证.

$\widehat{G/H}$ 中单元 $e_{G/H}$ 的邻域的基是 $N(Y, \rho)$:

$N(Y, \rho) = \{\beta \in \widehat{G/H} \mid |\beta(y) - 1| < \rho, \forall y \in Y, Y \text{ 是 } G/H \text{ 中的紧集, } \rho > 0\}.$

H^\perp 中单元 e_{H^\perp} 的邻域的基是 $N(X, \rho) \cap H^\perp$:

$N(X, \rho) \cap H^\perp = \{\gamma \in H^\perp \mid |\gamma(x) - 1| < \rho, \forall x \in X, X \text{ 为 } G \text{ 中的紧集, } \rho > 0\}.$

因为 $\pi: G \rightarrow G/H$ 是连续的开映射, 若 X 是 G 中的紧集, 则 $\pi X = Y$ 是 G/H 中的紧集. 又给定 $\gamma \in H^\perp$, 存在 $\beta \in \widehat{G/H}$ 与之对应. 故给定 $N(X, \rho)$, 取 $Y = \pi X, \beta(y) = \beta \circ \pi x = \pi \beta(x)$, 则必有 $N(Y, \rho)$ 与之对应.

反之, 在 $\widehat{G/H}$ 中给定 $N(Y, \rho)$, 由引理11知, 对于紧集 Y , 有紧集 $X \subset G$, 使 $\pi X = Y$. 又对于 $\beta \in \widehat{G/H}, \gamma = \beta(\pi x)$. 于是得到 H^\perp 中的 $N(X, \rho)$ 与 $N(Y, \rho)$ 相对应, 所以 $\hat{\pi}$ 是同胚映射, 由此有以下定理.

定理20 H 是局部紧交换群 G 的闭子群, π 是 $G \rightarrow G/H$ 的同态映射, 则 $\hat{\pi}: \beta \rightarrow \beta \circ \pi$ 是 $\widehat{G/H}$ 到 H^\perp 上的同构同胚映射, 即

$$\widehat{G/H} \cong H^\perp.$$

这个定理说明商群 G/H 的对偶群是 G 的对偶群的一个闭子群.

由对偶定理知, 若 A 是 Γ 的闭子群, 则

$$\Gamma/A \cong A^\perp \text{ (将其看成 } \Gamma \text{ 的子集即为 } A^\perp \text{)}.$$

若取 $A = H^\perp$, 则得 $\Gamma/H^\perp \cong H$.

又若 $\alpha: G_1 \rightarrow G_2$ 是拓扑同构, 即 $G_1 \cong G_2$, 自然引出 $\hat{\alpha}: \hat{G}_2 \rightarrow \hat{G}_1, \gamma_2 \rightarrow \hat{\alpha} \gamma_2$ 定义为

$$(\hat{\alpha} \gamma_2) g_1 = \gamma_2(\alpha g_1), \quad (g_1 \in G_1, \alpha g_1 \in G_2).$$

于是 $\hat{G}_2 \cong \hat{G}_1$, 即两个特征标群拓扑同构. 因此由 $\widehat{G/H} \cong H^\perp$ 及 $\Gamma/H^\perp \cong H$, 得 $G/H \cong H^\perp$ 及 $\Gamma/H^\perp \cong H$.

综上所述, 得到以下结论.

若 G 是局部紧交换群, H 是 G 的闭子群, 则商群 G/H 的特征标群 $\widehat{G/H}$ 是 \widehat{G} 的一个闭子群 H^\perp , 而子群 H 的特征标群 \widehat{H} 是特征标群 \widehat{G} 的商群 $\widehat{G/H^\perp}$.

定理21 若 H 是 G 的闭子群, 则 H 的每一个连续特征标都可以扩张成 G 的连续特征标. 即若 $\varphi \in \widehat{H}$, 则存在 $\gamma \in \widehat{G}$, 使得 $\gamma|_H = \varphi$.

证 因 $\widehat{H} \cong \Gamma/H^\perp$ 知, 若 $\varphi \in \widehat{H}$, 在 φ 的傍集中任取 γ 有 $\gamma H^\perp = \varphi$. 由 H^\perp 的定义知, 当 $x \in H$ 时, $\gamma(x) = \varphi(x)$. 故 $\gamma \in \widehat{G}$ 且 $\gamma|_H = \varphi$. 定理得证.

对偶定理, 商群与子群的特征标群对研究局部紧拓扑群 G 的性质有着重要的作用. 例如可以由 $\widehat{G} = \Gamma$ 的性质反映 G 的性质, 同样由 $\widehat{\Gamma} = G$ 的性质也可以反映 Γ 的性质.

例 若 G 是紧交换群, 则 G 是连通的当且仅当 Γ 是非挠的(*torsion-free*)(即 $\gamma \neq e$, 则 $\gamma^n \neq e, \forall n \in \mathbb{N}$).

证 先用反证法证明充分性.

若 G 是非连通的, 则存在 $A \subset G, \emptyset \neq A \neq G$. 且 A 是又开又闭的. 因 A 是闭的, G 是紧的, $A \subset G$, 故 A 也是紧的. 又 A 是开的, 由§6.1拓扑群的性质8知

$$H = \{x \in G \mid xA \subset A \text{ 且 } x^{-1}A \subset A\}$$

是开的. 显然 $e \in H$, 且由于 $A \neq G$, 故 $H \neq G$. H 是 G 的真开子群. 事实上, 若 $x, y \in H$, 则 $(xy)A = x(yA) \subset xA \subset A$, 又若 $x \in H$ 则 $x^{-1} \in H$. 故 $(xy)^{-1}A \subset A$. 所以 $xy \in H$.

由于 H 是开子群, 研究商群 G/H . $V \subset G/H$ 是开集是指 $\pi^{-1}V$ 是开的. 又 $\pi^{-1}(\dot{e}) = H$, 故 $\{\dot{e}\}$ 是开集, 同时 G/H 是离散的.

又由定理3知开子群也是闭的, 故 H 是闭的, $\pi: G \rightarrow G/H$ 是连续的. 由于 G 是紧的, 所以 G/H 也是紧的. G/H 是离散的又是紧的, 故 G/H 是有限的, 因此 $\widehat{G/H}$ 是有限的. 但因 $\widehat{G/H} \cong H^\perp$, 所以 Γ 包含了一个非平凡的有限子群 H^\perp . 若 $\gamma \in H^\perp$ 且 $\gamma \neq e$, 由于 H^\perp 有限, 必有 $k \in \mathbb{N}$ 使 $\gamma^k = e$. 故 Γ 不是非挠的. 充分性得证.

下面再用反证法证明必要性.

若 Γ 不是非挠的, 则存在 $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$ 且有 $n \in N$ 使 $\gamma^n = e$, 所以

$$\gamma(G) \subset \{z \in T \mid z^n = 1\}.$$

因此 $\gamma(G)$ 是不连通的, 又由于 γ 是连续的, 故 G 也是不连通的. 必要性得证.

§ 7.6 结构定理

定义 6 A 是交换群, 若对每一个 $a \in A$ 及每一个 $n \in N$, 存在着 $x \in A$ 使得 $nx = a$, 则称 A 为可除的.

例如 R , T , C 都是可除的.

引理 12 设 B 是交换群, A 是 B 的可除子群, π 是 $B \rightarrow B/A$ 的同态映射, 则存在 $B/A \rightarrow B$ 的同态映射 σ , 使得

$$\pi \circ \sigma = \text{id}_{B/A},$$

其中符号 id_X 表示集合 X 上 $X \rightarrow X$ 的恒等映射.

证 设 J 为 B/A 的子群, ρ 是 $J \rightarrow B$ 的同态映射, 使得 $\pi \circ \rho = \text{id}_J$.

取 $u \in B/A \setminus J$, 作 $J_u = \{V + mu \mid V \in J, m \in \mathbb{Z}\}$. 若能证明存在 $J_u \rightarrow B$ 的同态映射 ρ_u , 使得

$$\pi \circ \rho_u = \text{id}_{J_u},$$

且

$$\rho_u|_J = \rho,$$

则利用Zorn引理, 即可证明引理.

取 $x = \pi^{-1}(u)$. 分两种情形讨论.

情形一. 若对一切 $n \in N$, $nu \notin J$. 这时 J_u 中元素的表现形式是唯一的. 事实上, 若 $V' + m'u = V + mu$, 且 $m' \geq m$, 则 $V - V' = (m' - m)u$. 又 $V - V' \in J$, $(m' - m)u \notin J$. 所以 $V' = V$, $m' = m$.

现定义 ρ_u 如下:

$$\rho_u(V + mu) = \rho(V) + mx.$$

则 ρ_u 是 $J_u \rightarrow B$ 的同态映射, 且

$$\pi \circ \rho_*(V + mu) = \pi \circ \rho(V) + m\pi x = V + mu,$$

即 $\pi \circ \rho_* = \text{id}_{J_*},$

且显然 $\rho_*|_J = \rho.$

情形二。若存在 $k \in N$ 使 $ku \in J$, 且设 k 是使 $ku \in J$ 的最小整数, 即若 $1 \leq r \leq k$ 则 $ru \notin J$.

因为 $\pi x = u$, 所以

$$\pi(kx - \rho(ku)) = ku - ku = O_{B/A} (B/A \text{ 中的零元素}).$$

这表明 $kx - \rho(ku) \in A$. 又 A 是可除的, 故存在 $y \in A$, 使得 $ky = kx - \rho(ku)$, 即

$$k(x - y) = \rho(ku).$$

现定义 ρ_* 如下:

$$\rho_*(V + mu) = \rho(V) + m(x - y).$$

这样定义的 ρ_* 是有意义的。事实上, 若 $V' + m'u = V + mu$, 不妨设 $m' \geq m$, 则 $V - V' = (m' - m)u$. 设

$$m' - m = lk + r, \quad l \geq 0, \quad 0 \leq r < k.$$

因为 $V - V' \in J$, 故 $(m' - m)u = (lk + r)u \in J$. 又 $ku \in J$, 且 k 是使 $ku \in J$ 的最小整数, 所以 $r = 0$, 即 $m' - m = lk$. 因此 $V = V' + lku$.

于是

$$\rho(V) = \rho(V' + lku) = \rho(V') + l\rho(ku) = \rho(V') + lk(x - y).$$

$$\rho(V) + m(x - y) = \rho(V') + (lk + m)(x - y) = \rho(V') + m'(x - y).$$

显然, 以上定义的 ρ_* 是 $J_* \rightarrow B$ 的同态映射, 且

$$\pi \circ \rho_*(V + mu) = \pi \circ \rho(V) + m\pi(x - y).$$

因为 $y \in A$, $\pi y = 0$, 且 $\pi x = u$, 所以

$$\pi \circ \rho_*(V + mu) = V + mu,$$

即 $\pi \circ \rho_* = \text{id}_{J_*},$

且 $\rho_*|_J = \rho.$

由 Zorn 引理, 可以找到 σ 是 $B/A \rightarrow B$ 的同态映射, 使得 $\pi \circ \sigma = \text{id}_{B/A}$, 且 σ 是 1-1 的。引理得证。

进一步可以验证 $\sigma(B/A) \cap A = \{0\}$, $\sigma(B/A) + A = B$. 事实

上, 若 $a \in \sigma(B/A) \cap A$, 则 $a \in A$ 故 $\pi a = 0$, 又 $a \in \sigma(B/A)$, 存在 $u \in B/A$ 使 $a = \sigma u$. 所以 $\pi a = \pi(\sigma u) = u$, 即 $u = O_{B/A}$. 因此 $a = \sigma O_{B/A} = O_B$, 即 $\sigma(B/A) \cap A = \{0\}$.

任取 $b \in B$, 则 $b = \sigma(\pi b) + (b - \sigma\pi(b))$. 而

$$\pi(b - \sigma\pi(b)) = \pi b - \pi b = 0,$$

所以 $b - \sigma\pi(b) \in A$, 即 $B = \sigma(B/A) + A$.

由此得 $B \cong A \times (B/A)$.

定义 7 G 是局部紧的可交换群, 若 X 是 G 的子集, 且 G 中没有包含 X 的真闭子集, 则称 G 是由 X 生成的, 或称 X 生成 G . 若 G 是由紧子集生成的, 则称 G 为紧生成的; 若 G 是由有限子集生成的, 则称 G 为有限生成的; 若 G 是由单点子集生成的, 则称 G 为单一的 (monothetic).

定理 22 若 G 是单一的, 则 G 作为拓扑群或同构于 \mathbb{Z} , 或为紧的.

证 若 G 是离散的, 则或者 G 是有限的, 或者 $G = \mathbb{Z}a$, $a \in G$. 令 $a \longleftrightarrow 1$, 则 G 同构于 \mathbb{Z} .

若 G 不是离散的. 由于 G 是单一的, 故存在 $a \in G$, 使 $G = \overline{\mathbb{Z}a}$. 现在证明 $G = \overline{N a}$, 只需证明若 $k \in \mathbb{Z}, k \leq 0$, 则 $ka \in \overline{N a}$.

取 0 的对称邻域 W , 则 $W \setminus \{ka, \dots, -a, 0, a, \dots, -ka\}$ 是非空开集, 又 $\overline{\mathbb{Z}a} = G$, 所以 $W \setminus \{ka, \dots, -a, 0, a, \dots, -ka\}$ 必与 $\mathbb{Z}a$ 相交, 即存在 $n \in \mathbb{Z}$, 使

$$na \in W \setminus \{ka, \dots, -a, 0, a, \dots, -ka\},$$

且 $|n| > -k$. 由于 W 是对称的, 故存在 $n > -k$, 使 $na \in W$, 所以 $ka + W \ni na + ka = (n+k)a$. 又 $ka + W$ 是 ka 的邻域, 且 ka 的任一邻域 $ka + U$ 有 $ka + U \supset ka + W$, 故 $ka + U \ni (n+k)a$, 又 $n+k > 0$. 即 $n+k \in N$, 因此 $ka \in \overline{N a}$.

令 V 为 0 的紧邻域, 任取 $y \in G$, 则

$$(y - V) \cap N a \neq \emptyset, \quad (y - V \text{ 为 } y \text{ 的邻域}).$$

即存在 $n \in N$, 使 $na \in y - V$, 即 $y \in V + na$. 所以

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V + na).$$

同理 $-y + V \ni na (n \in \mathbb{N})$, 所以 $y \in V - na$, 即

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V - na).$$

V 是紧的, 故存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $V \subset \bigcup_{n=1}^N (V - na)$. 取 $x \in G$,

由于 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V + na)$, 则必有 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in V + ka$. 又 $V \subset$

$$\bigcup_{n=1}^N (V - na), \text{ 所以}$$

$$x \in V - na + ka = V + (k - n)a, \quad n \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

以上说明, 若 $x \in V + ka$, 则 $x \in V + (k - n)a$. 即可以缩小 k . 记 $K_1 = \min \{l \in \mathbb{N} \mid x \in V + la\}$, 则 $k_1 \leq N$, 于是 $G \subset \bigcup_{n=1}^N (V + na)$, 因此 G 是紧集. 证毕.

例 G 是紧群, 则 G 是单一的充分必要条件是 Γ 是 T_d 的子群, 其中 T_d 表示取离散拓扑的单位圆周.

证 若 G 是单一的, $G = \overline{\mathbb{Z}a}$, G 由 a 生成, 则 $\gamma \in \Gamma$ 必由 $\gamma(a)$ 决定. 若 $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma'(a) = \beta$, 则 $(\gamma\gamma')(a) = \alpha \cdot \beta$, 故 $\gamma \rightarrow \gamma(a)$ 是同构的.

又 G 是紧的, 则 Γ 是离散的, 所以 Γ 是 T_d 的子群.

反之, 若 Γ 是 T_d 的子群, 则 $G = \widehat{\Gamma} \cong \widehat{T_d} / \Gamma^\perp$. 由 § 7.4 讨论知给 Γ 以离散拓扑, 记作 Γ_d , 则 $\widehat{\Gamma_d} = \overline{G}$, \overline{G} 是 G 的 Bohr 紧化, 且映射 $\beta: G \rightarrow \overline{G}$, 即 $\beta(x)\gamma = \gamma(x)$, 有 $\overline{\beta(G)} = \overline{G}$. 由此知 $\widehat{T_d} = \overline{\mathbb{Z}}$, 即 $G = \overline{\mathbb{Z}} / \Gamma^\perp$.

由映射 $\beta: \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}$. 知 $\overline{\mathbb{Z}}$ 由 $\beta(1)$ 生成, 即 $\overline{\mathbb{Z}}$ 是单一的. 又 $\pi: \overline{\mathbb{Z}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}} / \Gamma^\perp$, 故 $\pi\beta(1)$ 生成商群 $\overline{\mathbb{Z}} / \Gamma^\perp$, 所以 $G \cong \overline{\mathbb{Z}} / \Gamma^\perp$ 是单一的.

由以上讨论知 T 是单一的. 事实上 $\hat{T} = Z$, 而 Z 是 T 的一个子群.

定义 8 G_1, G_2 是拓扑群, U 是 $0 \in G_1$ 的邻域, 若存在着 U 到 $0 \in G_2$ 的邻域上的同胚映射 φ , 使得对一切 $x, y \in U$, $x+y \in U$ 有 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, 则称 G_1 局部同构于 G_2 .

局部同构是一个等价关系. 即

(1) G 局部同构于 G (自反性).

(2) 若 G_1 局部同构于 G_2 , 则 G_2 局部同构于 G_1 (对称性).

事实上. 若 U 是 $0 \in G_1$ 的邻域, φ 是 U 到 $0 \in G_2$ 邻域上的同胚映射. 令 w_1 是 $0 \in G_1$ 的邻域, 使得 $w_1 + w_1 \subset U$. 取 $w_2 = \varphi(w_1)$, 将 φ^{-1} 限制在 w_2 上记作 ψ , 则 w_2 是 $0 \in G_2$ 的邻域, 且 ψ 是 w_2 到 w_1 上的同胚映射, 若 $x, y \in w_2$ 且 $x+y \in w_2$, 则 $\psi(x), \psi(y) \in w_1 \subset U$ 且 $\psi(x) + \psi(y) \in w_1 + w_1 \subset U$. 故 $x+y \equiv \varphi(\psi(x)) + \varphi(\psi(y)) = \varphi(\psi(x) + \psi(y))$, 所以 $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$, 即 G_2 局部同构于 G_1 .

(3) 若 G_1 局部同构于 G_2 , G_2 局部同构于 G_3 , 则 G_1 局部同构于 G_3 (传递性).

例如, 若 H 是交换群 G 的离散子群, 则 H 是闭的, 且 G 局部同构于 G/H .

事实上, H 是离散的, 显然 $\overline{H} = H$. 对于 $0 \in G$ 可以找到一个邻域 U 使 $U \cap H = \{0\}$. 于是 $\pi: U \rightarrow \pi U$ 是 1-1 的且为开连续映射, 所以 G 和 G/H 局部同构.

定理 23 若拓扑群 G 局部同构于 R^n , 则 G 包含一个开子群 G_0 , G_0 拓扑同构于 $T^m \times R^{n-m}$, 即

$$G_0 \cong T^m \times R^{n-m}, \quad (0 \leq m \leq n).$$

证 G 局部同构于 R^n , R^n 也局部同构于 G , 则在 R^n 中存在包含 0 的开球 U , 在 G 中存在 0 的开邻域 V , 及同胚映射 $\varphi: U \rightarrow V$, 使得当 $x, y; x+y \in U$ 有 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$x \in R^n$, 存在 $p \in N$ 使得 $x/p \in U$. 若 $x/q \in U$, 则

$$p\varphi\left(\frac{x}{p}\right)=p\varphi\left(\frac{qx}{qp}\right)=pq\varphi\left(\frac{x}{pq}\right),$$

$$q\varphi\left(\frac{x}{q}\right)=q\varphi\left(\frac{px}{pq}\right)=pq\varphi\left(\frac{x}{pq}\right).$$

所以可以如下定义映射 $\Phi: R^n \rightarrow G$,

$$\Phi(x)=p\varphi\left(\frac{x}{p}\right).$$

显然 Φ 是一个代数同态. 事实上, 若 $x, y \in R^n$, 取 p 充分大 使 $\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{x+y}{p} \in U$, 则

$$\varphi\left(\frac{x+y}{p}\right)=\varphi\left(\frac{x}{p}\right)+\varphi\left(\frac{y}{p}\right),$$

所以 $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$.

又 φ 是同胚映射, 故 Φ 是连续的开映射. $\Phi|_U = \varphi$. 即 $\Phi: R^n \rightarrow \Phi(R^n)$ 是 R^n 到 $\Phi(R^n)$ 上的代数同态且为连续的开映射. 由第六章定理 7 知

$$\Phi(R^n) \cong R^n / \ker \Phi.$$

Φ 是开映射, 故 $\Phi(R^n)$ 是 G 的开子群, 取 $G_0 = \Phi(R^n)$, 则

$$G_0 \cong R^n / \ker \Phi$$

φ 是同胚映射, $\varphi(0) = 0$, 故 $\ker \Phi \cap U = \{0\}$, 即 $\ker \Phi$ 是离散的.

若 H 是 R^n 的离散子群, 则 $R^n/H \cong T^m \times R^{n-m}$ ($0 \leq m \leq n$). 这可由归纳法证明, 事实上, 当 $n=1$, $H \cong \mathbb{Z}$, 则 $R/\mathbb{Z} \cong T$. 再证 $n > 1$ 结论成立 (读者自证).

由以上事实知 $R^n / \ker \Phi \cong T^m \times R^{n-m}$, 即

$$G_0 \cong T^m \times R^{n-m}.$$

推论 12 若 G 是连通的, 且 G 局部同构于 R^n , 则 $G \cong T^m \times R^{n-m}$ ($0 \leq m \leq n$).

证 若 G 是连通的, 则 G 的任何一个开子群也是闭的, 故只有

$G_0 = G$, 所以 $G \cong T^m \times R^{s-m}$.

定理24 G 是局部紧交换群且为紧生成的, 则 G 具有闭子群 G_0 拓扑同构于 $Z^m (m \geq 0)$, 且使得 $G/G_0 \cong G/Z^m$ 是紧的.

证 G 是紧生成的, 故有紧集 $K \subset G$, 使 K 所生成的子群 $\langle K \rangle$ 在 G 中是稠密的, 即 $\overline{\langle K \rangle} = G$. 取 $J = K \cup (-K)$, 则 $J = -J$ 且 $\overline{\langle J \rangle} = G$, 即 G 可由对称紧集生成. 若取 U 是 $0 \in G$ 的紧对称邻域, 令 $V = J \cup U$, 则 $\overline{\langle V \rangle} = G$. 这说明 G 可由单元 0 的对称紧邻域生成. 取定 V 后, 令 $V_1 = V$, $V_2 = V + V = \bigcup_{x \in V} (x + V)$, $V_{n+1} = V_n + V$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ 是 V 所生成的最小子群, 因 V 是非空的, 故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ 是非空的. 又开子群一定是闭的, 所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = G.$$

V_2 是紧的, 故存在 $x_1, x_2, \dots, x_p \in G$, 使得

$$V_2 \subset \bigcup_{n=1}^p (V + x_n).$$

记 $H_i = \langle x_i \rangle = Zx_i$, 即 H_i 是由 x_i 生成的, 记 $H = \langle x_1, \dots, x_p \rangle = \{c_1 x_1 + \dots + c_p x_p \mid c_1, \dots, c_p \in Z\}$, 即 H 是有限生成的, 显然

$$V + H \supset V_1, \quad V + H \supset V_2.$$

又若 $V_n \subset V + H$, 则 $V_{n+1} = V_n + V \subset V + H + V = V_2 + H \subset V + H + H = V + H$, 所以对一切 n 有 $V_n \subset V + H$. 故

$$G = V + H.$$

下面分两种情形讨论.

情形一. 若 $\overline{H_i} (i=1, 2, \dots, p)$ 都是紧的, 则 \overline{H} 是紧的, 故 $G = V + \overline{H}$ 是紧的, 此时取 $m=0$. 定理得证.

情形二. 若 G 不是紧的, 则存在 $i (1 \leq i \leq p)$, 使 $\overline{H_i}$ 不是紧的, 又 $\overline{H_i}$ 是单一的, 由定理22知

$$\overline{H_i} \cong Z,$$

又 H_i 是离散的, 故 $H_i = \overline{H_i} \cong \mathbf{Z}$.

这就说明, $G = V + H$, V 是紧的, H 是 G 的子群且为有限生成的, 若 G 不是紧的, 则 H 必包含一个 G 的闭子群与 \mathbf{Z} 拓扑同构. 又 H 是有限生成的, 由归纳法知, 存在一个最大的 $m \geq 0$, 使得 H 包含一个 G 的闭子群与 \mathbf{Z}^m 同构.

再考虑 G/\mathbf{Z}^m . 设 π 是 $G \rightarrow G/\mathbf{Z}^m$ 的同态映射, π 是连续的开映射, $G = V + H$. 所以 $\pi G = \pi V + \pi H$, 且 πV 是紧的. 这样一来 πG 又可写成紧集合 πV 与代数群 πH 之和, 故可将以上对 $G = V + H$ 的讨论再一次运用到 πG 上.

若 πG 不紧, 则 πH 中一定包含一个 πG 的闭子群与 \mathbf{Z} 同构, 但由以上 m 的选择知这是不可能的, 故 πG 是紧的. 又 $\pi G = G/\mathbf{Z}^m$, 所以 G/\mathbf{Z}^m 是紧的, 定理得证.

定理25 每一个紧生成的、局部紧的可交换群 G , 拓扑同构于 $\mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^n \times C$. 即

$$G \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^n \times C,$$

其中 $p \geq 0$, $n \geq 0$, C 是紧的可交换群.

证 $\hat{G} = \Gamma$. 由定理24知, G 包含一个闭子群 \mathbf{Z}^m . 令 $D = \mathbf{Z}^{m\perp}$, 则由定理20知, 群 \mathbf{Z}^m 的特征标群为 $\hat{G}/\mathbf{Z}^{m\perp}$. 即

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Z}}^m &\cong \Gamma/D, \\ \hat{D} &\cong \hat{\Gamma}/D_\perp = G/\mathbf{Z}^m.\end{aligned}$$

又 $\hat{\mathbf{Z}} \cong T$, 故 $\hat{\mathbf{Z}}^m \cong T^m$. 又 $T^m \cong \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$, \mathbf{Z}^m 是 \mathbf{R}^m 的离散子群, 由定义8后的例题知 $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ 局部同构于 \mathbf{R}^m . 所以由

$$\Gamma/D \cong \hat{\mathbf{Z}}^m \cong T^m \cong \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$$

知 Γ/D 局部同构于 \mathbf{R}^m .

由定理24知 G/\mathbf{Z}^m 是紧的, $\hat{D} \cong G/\mathbf{Z}^m$, 故 D 为离散的, 即 D 为 Γ 的离散子群. 所以 Γ/D 局部同构于 Γ . 由局部同构的传递性知, Γ 局部同构于 \mathbf{R}^m . 由定理23知 Γ 包含一个开子群 Γ_0 , 且

$$\Gamma_0 \cong T^p \times \mathbf{R}^{m-p}, \quad (0 \leq p \leq m).$$

由此知, Γ_0 是可除的, 由引理12知, 存在 $\Gamma/\Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ 的同态映射 σ ,

使

$$\pi \circ \sigma = \text{id}_{\Gamma/\Gamma_0}.$$

其中 π 是 $\Gamma \rightarrow \Gamma/\Gamma_0$ 的同态映射, 且

$$\Gamma \cong \Gamma_0 \times \Gamma/\Gamma_0.$$

又 $G = \hat{\Gamma}$, 故 $G \cong \hat{\Gamma}_0 \times \hat{\Gamma}/\Gamma_0$, 又 $\hat{\Gamma}_0 \cong \hat{T}^p \times \hat{R}^{m-p} \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^{m-p}$,

所以 $G \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^{m-p} \times \hat{\Gamma}/\Gamma_0$.

又 Γ_0 是开的, 故 Γ/Γ_0 是离散的, 所以 $\hat{\Gamma}/\Gamma_0$ 是紧的. 令 $C = \hat{\Gamma}/\Gamma_0$, 得

$$G \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^{m-p} \times C.$$

再令 $m-p=n \geq 0$, 得 $G \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^n \times C$. 定理得证.

推论13 有限生成的可交换群, 必为整数加法群和有限交换群的直和.

证 若 G 的拓扑是离散的, 则紧生成即为有限生成, 故由以上定理知

$$G \cong \mathbf{Z}^p \times C,$$

且 C 是紧的必为有限的.

定理26 (局部紧交换群的基本结构定理) 每一个局部紧交换群 G 都有一个开子群 G_0 拓扑同构于 $\mathbf{R}^m \times C$, 其中 $m \geq 0$, C 是一个紧的交换群.

证 G 是局部紧的, 令 V 是 $0 \in G$ 的紧对称邻域, $V_1 = V, V_{n+1} = V_n + V$. 且令 $G_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, 则 G_1 是 G 的开子群, 且 G_1 是由 V 生成的, 故 G_1 为紧生成的, 由定理25知

$$G_1 \cong \mathbf{Z}^p \times \mathbf{R}^m \times C.$$

因此 G_1 包含一个开子群 G_0 , 且

$$G_0 \cong \mathbf{R}^m \times C.$$

G_0 显然是 G 的开子群. 定理得证.

- E. Hewitt and K.A. Ross, *Harmonic Analysis*,
 Springer-Verlag.
- T. S. Liu and A. Von Rohr, *Harmonic Analysis, Vol I*,
In manuscript.
- W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York,
 1973.
- W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill,
 New York, 1966.
- W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley (Inter-
 science), New York, 1962.

[General Information]

□□ = □□□□□□□□□□□□

□□ = (□) □□□□□□□□

□□ = 3 0 2

SS□ = 1 0 0 6 9 8 2 5

□□□□ =